Über
zwei den Eulerschen Funktionen $\Gamma(p)$ und $B(p, q)$ ähnliche Doppelintegrale.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde einer hohen philosophischen Fakultät der Universität Leipzig

vorgelegt von

Hans Eckert

aus **Herrenalb** in Wttbg. (Schwarzwaldkreis).

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Weida i. Thür.
Druck von Thomas & Hubert
Spezialdruckerei für Dissertationen
1914.

Angenommen von der III. Sektion auf Grund der Gutachten der Herren

Hölder und Herglotz.

Leipzig, den 23. Mai 1914.

Der Procancellar.
Kirchner.

Dem mathematischen Sachverständigen
der Gothaer Lebensversicherungsbank

Herrn Professor Dr. Johannes Karup

ergebenst zugeeignet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547019_0038

Inhaltsverzeichnis.

Seite

§ 1. Definition und analytischer Charakter der beiden Funktionen $E(\mu, \nu)$ und $H(\mu, \nu, \varrho)$ 7

§ 2. Zusammenhang zwischen den Funktionen $E(\mu, \nu)$ und $H(\mu, \nu, \varrho)$ 25

§ 3. Funktionalbeziehungen für die Funktionen $E(\mu, \nu)$ und $H(\mu, \nu, \varrho)$ 57

§ 4. Spezialfälle 67

§ 5. Versuche, vermittels der Funktion $E(\mu, \nu)$ gewisse vielfache Integrale zu reduzieren 72

§ 1.

Definition und analytischer Charakter der beiden Funktionen $E(\mu, \nu)$ und $H(\mu, \nu, \varrho)$.

Einleitendes.

Die Lehre von der Auswertung und der Erforschung bestimmter Integrale, insbesondere von solchen, bei denen bei der Wahl der Integrationsgrenzen von ganz speziellen Gesichtspunkten ausgegangen wurde, um dadurch gewisse Vorteile für die Darstellung in geschlossener Form zu erhalten, — wie etwa bei Integralen mit den Grenzen (0, 1) oder $(0, \infty)$, — hat bekanntlich außerdem noch die Folge gehabt, daß auf diese Weise gewisse transzendente Funktionen erzeugt wurden, die in mancherlei Untersuchungen aufgetreten und von großem Nutzen gewesen sind, oft aber auch schon um ihrer selbst willen hohes Interesse beanspruchen konnten.

Unter den derartigen bestimmten Integralen ist ohne Zweifel das sogenannte „Eulersche Integral II. Art“ (von Legendre zuerst mit „Gammafunktion“ bezeichnet) an erster Stelle zu nennen. Nicht allein verdient dieses Integral, das sich bekanntlich unter der Form:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

darstellt, schon um seiner selbst willen das große Interesse, das ihm die Mathematiker von jeher gewidmet haben, sondern es zeichnet sich auch noch dadurch aus, daß von der Kenntnis dieser wichtigen transzendenten Funktion viele schöne und nützliche Resultate sich herleiten lassen, selbst für solche Aufgaben, die nicht bloß der Integralrechnung angehören.

So können bekanntlich durch diese transzendente Funktion $\Gamma(p)$ z. B. zahlreiche andere bestimmte Integrale hergeleitet werden; besonders wird auch durch diese Funktion die Zurückführung gewisser mehrfacher Integrale auf einfache Integrale ermöglicht. Die vielen anderen zum Teil äußerst fruchtbaren Resultate anzuführen, die das Studium dieses bestimmten Integrals ergeben haben, würde hier zu weit führen.

Es sei nur kurz gestattet, die drei Haupteigenschaften der Gammafunktion anzugeben.

Diese stellen sich bekanntlich folgendermaßen dar:

Geht man von der bekannten Integraldarstellung aus;

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx,$$

die für alle positiven Werte des Arguments p gilt, so findet man leicht durch partielle Integration die Funktionalgleichung:

I. $$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p),$$

aus der sich durch wiederholte Anwendung weitere nützliche Folgerungen ziehen lassen.

Als zweites Fundamentaltheorem der Gammafunktion bezeichnet man dann den bekannten Komplementensatz:

II. $$\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

und schließlich noch das sogenannte Gaußsche Theorem:

III. $$\Gamma(p) \cdot \Gamma\left(p+\frac{1}{m}\right) \ldots \Gamma\left(p+\frac{m-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} \cdot m^{-mp+\frac{1}{2}} \Gamma(mp).$$

Eine weitere wichtige Relation für diese Funktion, die ebenfalls manche interessante Folgerung zuläßt, ist:

IV. $$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p},$$

die bekanntlich für alle Werte $a > 0$ (auch für komplexes a mit positivem reellen Bestandteil gilt).

Neben diesem besonderen bestimmten Integral der Gammafunktion existiert nun bekanntlich das „Eulersche Integral I. Art“ unter der Form:

V. $$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \quad \begin{matrix} p>1 \\ q>1 \end{matrix}$$

das mit dem ersteren durch die bekannte Relation:

VI. $$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

verknüpft ist, wie zuerst Euler und später Legendre, Binet, Jacobi und andere auf mancherlei Weise nachgewiesen haben.

Es liegt nun nahe zu versuchen, ob man dadurch eine Verallgemeinerung der beiden obigen Integrale erhalten könnte, indem man nunmehr, anstatt auf ein bestimmtes einfaches Integral, ähnliche Betrachtungen an einem bestimmten Doppelintegral zwischen denselben entsprechenden Grenzen $(0, 1)$ beziehungsweise $(0, \infty)$ vornähme, worin aber noch die Bedingung vorausgesetzt werden müßte, daß in der Exponentialfunktion e^{-x} nicht eine lineare Funktion der Variabeln x, sondern nunmehr eine Funktion II. Grades zweier Integrationsvariabeln x und y einträte; etwa $e^{-\varphi(x, y)}$, um auf diese Weise zu einer wirklich neuen Funktion zu gelangen.

Allerdings werden über diese Funktion II. Grades $\varphi(x, y)$ noch einige Voraussetzungen zu machen sein, damit dies so gebildete Doppelintegral nicht etwa in das Produkt zweier einfachen Integrale zerfällt, die dann die bekannten Gammafunktionen ergeben würden, wie wir in späteren Untersuchungen leicht werden zeigen können.

Wir betrachten daher einmal, entsprechend dem Γ-Integral, das bestimmte Doppelintegral:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\mu-1}y^{\nu-1}e^{-\varphi(x, y)}\,dx\,dy,$$

und entsprechend dem B-Integral, das analoge Doppelintegral:

$$\int_0^1\int_0^1 x^{\mu-1}y^{\nu-1}[1-\varphi(x,y)]^{\varrho-1}\,dx\,dy.$$

Wenn nun bekanntlich in einem bestimmten Integral, das von gewissen Variabeln abhängig ist, die Funktion unter dem

Integralzeichen eine oder auch mehrere Größen enthält, deren konstanter Wert bei der Integration nichtsdestoweniger beliebig bleibt, so kann man das bestimmte Integral als Funktion dieser Größen bezeichnen.

Aus diesem Grunde kann man die beiden vorgelegten obigen Doppelintegrale offenbar als Funktionen der Parameter (μ, ν) bezw. (μ, ν, ϱ) auffassen und diese Bezeichnungsweise etwa folgendermaßen zum Ausdruck bringen:

I. $$E(\mu, \nu) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-\varphi(x,y)} dx\, dy$$

und

II. $$H(\mu, \nu, \varrho) = \int_0^1 \int_0^1 x^{\mu-1} y^{\nu-1} [1-\varphi(x,y)]^{\varrho-1} dx\, dy.$$

Bei einer vergleichenden Betrachtung mit den erwähnten einfachen Integralen wird offenbar eine große Analogie mit diesen nicht zu verkennen sein.

Für die darin auftretende Funktion II. Grades $\varphi(x, y)$ soll nun die quadratische Form:

$$\varphi(xy) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

gewählt werden. Diese Bedingung allein genügt jedoch noch nicht, um in der Tat zwei neue Funktionen zu erhalten, vielmehr werden wir sogleich sehen, daß zu diesem Zwecke einige weitere Voraussetzungen nötig sind.

Vorher wollen wir jedoch mit den beiden Integralen $E(\mu, \nu)$ und $H(\mu, \nu, \varrho)$ noch eine einfache Transformation vornehmen, wodurch beide Funktionen eine zum Teil andere Form erhalten, die für spätere Entwicklungen nützlich sein werden.

Setzen wir nämlich:

$$ax^2 = \xi^2; \quad cy^2 = \eta^2 \quad \text{und} \quad \frac{b}{\sqrt{a \cdot c}} = \beta,$$

so wird die quadratische Form:

$$\varphi(x, y) = \xi^2 + 2\beta\xi\eta + \eta^2.$$

Im ersten Integral bleiben die Grenzen nach der Transformation dieselben.

Setzen wir außerdem

$$C = \frac{1}{a^{\frac{\mu}{2}} \cdot c^{\frac{\nu}{2}}},$$

so geht die Funktion $E(\mu, \nu)$, falls wir die ursprünglichen Variabeln einführen, über in:

Ia. $$E(\mu, \nu) = C \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-(x^2+2\beta xy+y^2)} dx\, dy,$$

die dann außer den Konstanten μ und ν nur noch den Koeffzienten β enthält.

Im zweiten Integral $H(\mu, \nu, \varrho)$ erfahren aber auch noch die Grenzen eine Veränderung.

Wir erhalten nämlich:

für $x = 0 \ldots 1$ für $y = 0 \ldots 1$

$\xi = 0 \ldots \sqrt{a} = \alpha$ gesetzt, $\eta = 0 \ldots \sqrt{c} = \gamma$ gesetzt,

und demnach die transformierte Form:

IIa. $$H(\mu, \nu, \varrho) = C \int_0^\alpha \int_0^\gamma x^{\mu-1} y^{\nu-1} [1-(x^2+2\beta xy+y^2)]^{\varrho-1} dx\, dy.$$

Nun war für $\varphi(x, y)$ eine quadratische Form:

$$\varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \text{ oder } (x^2 + 2\beta xy + y^2)$$

vorausgesetzt.

Für eine solche kann man jedoch folgende drei Fälle unterscheiden: entweder ist diese quadratische Form

I. definit, d. h. es können durch sie nur Zahlen eines bestimmten Vorzeichens dargestellt werden, und zwar entweder mit positivem Vorzeichen (positive definite Form), oder solche mit negativem Zeichen (negative definite Form), wobei die Form nicht verschwinden kann außer für $x = y = 0$;

II. indefinit, d. h. sie stellt sowohl positive als negative Zahlen dar, und endlich:

III. semidefinit, d. h. sie stellt zwar nur Zahlen eines bestimmten Vorzeichens dar, verschwindet aber auch für Fälle, für die nicht $x = y = 0$ ist.

Dazu ist weiterhin folgendes zu bemerken:

Zunächst kann $\varphi(x,y)$ auch in der Form:

$$\varphi(x,y) = \frac{(ax+by)^2+\Delta y^2}{a}, \text{ wo } a \neq 0 \text{ und}$$

$$\varphi(x,y) = \frac{(cy+bx)^2+\Delta x^2}{c}, \text{ wo } c \neq 0 \text{ sein muß,}$$

dargestellt werden.

$\Delta = ac - b^2$ bedeutet dabei die sogenannte „Determinante" der Form.

Der erste Fall, nämlich $\varphi(x,y)$ definit, tritt bekanntlich dann und nur dann ein, wenn die Determinante $\Delta = ac - b^2 > 0$ d. h. positiv ist, was weiterhin nur möglich ist, wenn die beiden äußersten Koeffizienten von Null verschieden sind und dasselbe Vorzeichen haben. Für den Fall einer positiven definiten Form müssen a und c positive Größen sein, und daher haben auch $\sqrt{a}$, $\sqrt{c}$ und $\sqrt{\Delta}$ von Null verschiedene reelle Werte, die wir uns positiv denken wollen. Der Quotient $\frac{ac-b^2}{ac}$ ist dann ein nie verschwindender positiver echter Bruch, der für $b = 0$ der Einheit gleich kommt. Deshalb hat auch die bereits erwähnte Größe $\beta = \frac{b}{\sqrt{ac}}$ einen für $b = 0$ verschwindenden, aber niemals die Einheit erreichenden Wert; d. h. es ist stets $\beta < 1$, eine Tatsache, von der im folgenden Paragraphen eine wichtige Verwendung gemacht werden soll.

Der zweite Fall, d. h. $\varphi(x,y)$ eine indefinite Form II. Grades, hat bekanntlich zur Bedingung, daß die Determinante $\Delta = ac - b^2 < 0$, d. h. stets negativ sein muß. Dann läßt sich aber die quadratische Form $\varphi(x,y)$ in das Produkt zweier Linearfaktoren zerlegen:

$$\varphi(x,y) = (\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y),$$

gleichgültig, ob $a \neq 0$ und $c \neq 0$, oder $a = c = 0$ ist.

Die Form $\varphi(x,y)$ wird nur dann verschwinden, wenn einer der beiden Faktoren: $(\alpha x + \beta y) = 0$ oder $(\gamma x + \delta y) = 0$ würden. Dies wäre also auch die Bedingung, daß in dem vorgelegten Doppelintegral der Faktor $e^{-\varphi(x,y)}$ die Einheit erreichen könnte.

Da außerdem die Determinante $ac - b^2 < 0$, d. h. negativ ist, so würde (falls wir annehmen, daß a und c dasselbe Vorzeichen haben), $b^2 > ac$ sein, und daher der Koeffizient $\beta = \frac{b}{\sqrt{a \cdot c}}$ die Einheit überschreiten. Dieser Fall wird aber für die Definition der beiden Doppelintegrale $E(\mu, \nu)$ und $H(\mu, \nu, \varrho)$ auszuschließen sein, da die hierfür im folgenden anzugebenden Entwicklungen allein für die Bedingung $\beta < 1$ ihre Gültigkeit beibehalten.

Im dritten Fall, wo also $\varphi(x, y)$ eine semidefinite Form bedeuten kann, wird die Determinante $\Delta = ac - b^2 = 0$. Es reduziert sich dann bekanntlich $\varphi(x, y)$ auf das vollständige Quadrat eines linearen Ausdrucks:

$$\text{für } a \neq 0 \text{ ist: } \varphi(x, y) = (ax + by)^2,$$
$$\text{für } c \neq 0 \text{ ist: } \varphi(x, y) = (bx + cy)^2.$$

Denn $\Delta = ac - b^2 = 0$ ist nur dann möglich, wenn $ac = b^2$, d. h. $b = \sqrt{ac}$ und also

$$\varphi(x, y) = ax^2 + 2\sqrt{ac}\,xy + cy^2 = \left(\sqrt{a}\,x + \sqrt{c}\,y\right)^2 \quad \text{wird.}$$

Dieser semidefinite Fall ist nun für die Definition von $E(\mu, \nu)$ und $H(\mu, \nu, \varrho)$ ohne weiteres auszuschließen, denn etwa für $a = b = c = 1$, wo also $\Delta = 0$ wird, reduziert sich das Doppelintegral $E(\mu, \nu)$ sofort auf ein Produkt zweier Gammafunktionen.

In diesem Falle wird nämlich offenbar:

$$E(\mu, \nu) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-(x+y)^2} dx\, dy.$$

Und dies ist, wie wir später im § 4 sehen werden, vermittels der bekannten Jacobischen Transformation:

$$x = u \cdot v, \quad y = u(1 + v), \quad x + y = u$$

gleich:

$$E(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\mu) \cdot \Gamma(\nu) \cdot \Gamma\left(\frac{\mu + \nu}{2}\right)}{\Gamma(\mu + \nu)}$$

Des weiteren ist ebenfalls $\beta = 0$, d. h. $b = 0$ auszuschließen, denn hierfür wird offenbar:

$$E(\mu,\nu)=\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\mu-1}y^{\nu-1}e^{-ax^2-cy^2}\,dx\,dy,$$

was sich desgleichen in Gammafunktionen auflöst, nämlich:

$$E(\mu,\nu)=\frac{1}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{a^{\frac{\mu}{2}}\cdot c^{\frac{\nu}{2}}}.$$

Wir definieren daher die Funktionen $E(\mu,\nu)$ und $H(\mu,\nu,\varrho)$ wie folgt:

$$E(\mu,\nu)=\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\mu-1}y^{\nu-1}\,e^{-\varphi(x,y)}\,dx\,dy,$$

$$H(\mu,\nu,\varrho)=\int_0^1\int_0^1 x^{\mu-1}y^{\nu-1}[1-\varphi(x,y)]^{\varrho-1}dx\,dy,$$

wo $\varphi(x,y)$ eine positive definite Form II. Grades:

$$\varphi(x,y)=ax^2+2\,bxy+cy^2$$

bedeuten soll.

Der Integrand

$$f(x,y)=x^{\mu-1}\,y^{\nu-1}e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}$$

wird unter diesen Bedingungen, falls wir uns nämlich hinsichtlich der Werte (x,y) nur für solche des I. Quadranten beschränken und des weiteren $\varphi(x,y)$ als positive definite Form II. Grades voraussetzen, eine überall positive Funktion darstellen. Denn die beiden Potenzen $x^{\mu-1}$ und $y^{\nu-1}$ bleiben innerhalb der geforderten Integrationsgrenzen stets positiv, falls für μ und ν reelle Werte angenommen werden, da eine Potenz m^{x-1} sich bekanntlich für reelle Werte von x auf den einzigen positiven Wert beschränkt.

Die nächste Aufgabe wäre es nun nachzuweisen, daß die beiden vorgelegten Doppelintegrale immer eine bestimmte, endliche Größe darstellen.

Wenn innerhalb eines Intervalles $\langle a,b;\,c,d\rangle$ für ein oder mehrere Wertepaare (x,y), oder auch für die Grenzen selbst, die Funktion $f(x,y)$ durchs Unendliche geht, so kann nicht ohne weiteres behauptet werden, daß das bestimmte Integral:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$$

immer einen Sinn hat, d. h. eine bestimmte Größe darstellt. Denn: soll das Integral nicht ohne Bedeutung sein, so ist die unerläßliche Bedingung, daß der Wert desselben eine bestimmte, endliche Größe bezeichnet, oder gegen eine solche konvergiert. Dies aber kann nicht ohne weiteres gefolgert werden, wenn die Funktion $f(x,y)$ für irgend ein Wertepaar der Variabeln oder für die Integrationsgrenzen unendlich groß wird.

Für unsere vorgelegte Funktion $E(\mu,\nu)$ tritt dies bei dem Integranden $f(x,y) = x^{\mu-1}y^{\nu-1}e^{-\varphi(x,y)}$ für ein Wertepaar innerhalb des vorgeschriebenen Bereiches allerdings nicht ein, wohl aber für die Integrationsgrenzen, insofern nämlich, als die Funktion $f(x,y)$ einmal für $x=0$ und $y=0$ unendlich groß wird, und zwar wenn die Parameter μ und ν negative Werte oder positive Werte kleiner als 1 annehmen. Außerdem würde $f(x,y)$ auch für die oberen Grenzen $x=\infty$ und $y=\infty$ unendlich groß werden.

Zunächst wollen wir die Entscheidung, wie sich ein Integral verhält, wenn der Integrand für die Grenzen unendlich wird, für das ganz allgemeine Integral:

$$\int_m^b \int_n^d f(x,y)\,dx\,dy$$

treffen und dann erst diese allgemeinen Betrachtungen auf die vorgelegte Funktion $E(\mu,\nu)$ anwenden.

Die Beantwortung dieser Frage für dieses allgemeine bestimmte Integral ist nun oft mit großen Schwierigkeiten verknüpft, zumal, wenn das betreffende Integral sich nicht unbestimmt integrieren läßt, wie im gegebenen Beispiel für die Funktion $E(\mu,\nu)$. Man hat sich dann nach einem anderen Hilfsmittel umzusehen.

Dieses beruht auf der Tatsache, daß bekanntlich eine veränderliche Größe sich notwendig einer Grenze wird nähern

müssen, sofern ihre Veränderung, abgesehen vom Vorzeichen d. h. also dem absoluten Betrage nach, eine beliebig kleine Größe σ nicht mehr zu überschreiten vermag.

Bei der Anwendung dieses Prinzips ist zu bedenken, daß das zu untersuchende Integral dann, wenn der Integrand für $x = m$ oder für $y = n$ oder für beide Fälle unendlich groß wird, kein eigentliches ist, sondern als Grenzwert eines solchen Integrals aufgefaßt werden muß, dessen Grenzen sich um unendlich kleine Größen von m und n unterscheiden.

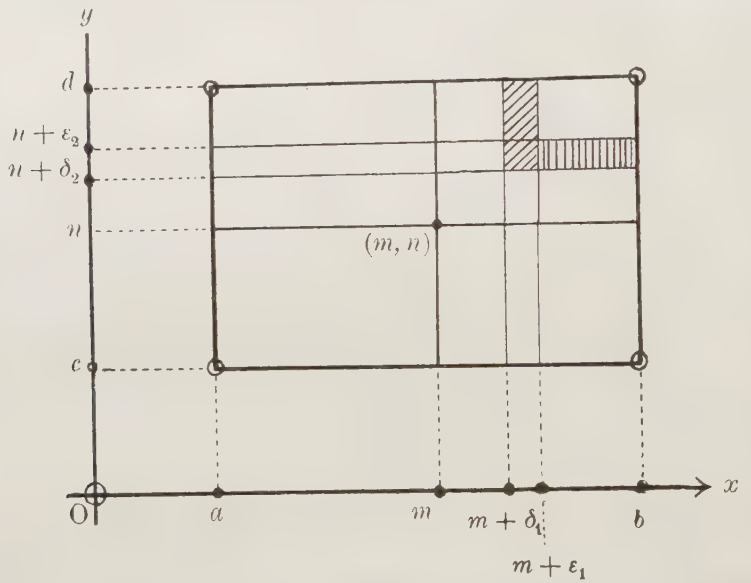

Fig. 1.

Nach diesen kurzen Vorbemerkungen können wir nunmehr zur Beantwortung der Frage zurückkehren, unter welchen Bedingungen dem über das Intervall $\langle m, b; n, d\rangle$ erstreckten Doppelintegral

$$\int_m^b \int_n^d f(x, y)\, dx\, dy$$

ein bestimmter Sinn beigelegt werden darf, wenn die zu integrierende Funktion für ein gewisses Wertepaar (m, n) unendlich groß wird.

Zu diesem Zwecke setzen wir voraus, daß für einen nahe an $x = m$ gelegenen Wert $x = m + \varepsilon_1$ und für einen nahe an $y = n$ gelegenen Wert $y = n + \varepsilon_2$ der Integrand $f(x, y)$ noch endlich bliebe. Ebenso für einen derartigen zweiten nahe an $x = m$ bezw. $y = n$ gelegenen Wert $x = m + \delta_1$ bezw. $y = n + \delta_2$, der außerdem noch die Eigenschaft besitzen soll, daß er von $x = m + \varepsilon_1$ bezw. $y = n + \varepsilon_2$ unabhängig ist und näher an $x = m$ bezw. $y = n$ liegt, als die Werte ε_1 bezw. ε_2 (Fig. 1).

Nehmen wir noch des weiteren an, daß in den Intervallen:

$$< m + \varepsilon_1,\ b;\ n + \varepsilon_2,\ d > \text{ und } < m + \delta_1,\ b;\ n + \delta_2,\ d >$$

die zu integrierende Funktion $f(x, y)$ überall stetig ist, so werden jedenfalls die über diese beiden Intervalle erstreckten Doppelintegrale überall einen bestimmten endlichen Wert behalten.

Unter diesen Bedingungen geben dann jedenfalls die beiden Integrale:

$$\text{I: } \left| \int_{m+\varepsilon_1}^{b} \int_{n+\delta_2}^{n+\varepsilon_2} f(x, y)\, dx\, dy \right| \text{ und } \text{II: } \left| \int_{m+\delta_1}^{m+\varepsilon_1} \int_{n+\delta_2}^{d} f(x, y)\, dx\, dy \right|$$

die Veränderung an, die das Integral:

$$\text{III: } \left| \int_{m+\varepsilon_1}^{b} \int_{n+\varepsilon_2}^{d} f(x, y)\, dx\, dy \right|$$

durch den Übergang von $x = m + \varepsilon_1$ bezw. $y = n + \varepsilon_2$ in $x = m + \delta_1$ bezw. $y = n + \delta_2$ erleidet.

Sinken nun diese beiden eigentlichen Doppelintegrale (I) und (II) unter eine beliebig kleine Größe herab, so muß jedenfalls das Integral:

$$\int_{m+\varepsilon_1}^{b} \int_{n+\varepsilon_2}^{d} f(x, y)\, dx\, dy$$

nach den vorangegangenen allgemeinen Erörterungen bei gleichzeitig unabhängig von einander unaufhörlich abnehmenden ε und δ eine bestimmte endliche Grenze haben und damit das uneigentliche Integral:

$$\int_m^b \int_n^d f(x,y)\,dx\,dy$$

für das Wertepaar (m, n) nicht sinnlos werden, obgleich die Funktion $f(x,y)$ für diese Werte unendlich groß wird.

Übertragen wir nun diese Betrachtungsweise auf unsere vorgelegte Funktion:

$$f(x,y) = x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)},$$

dann wird also, wie wir gesehen haben, die Funktion $f(x,y)$ ein Integral:

$$\int_0^M \int_0^N x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dx\,dy$$

zulassen (wo M und N zwei hinreichend große, einstweilen bestimmte Größen darstellen sollen), auch für die unteren Grenzen $x=0$ und $y=0$, falls nur die beiden uneigentlichen Integrale (I) und (II):

$$\left|\int_{0+\varepsilon_1}^{M}\int_{0+\delta_2}^{0+\varepsilon_2} x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-\varphi(x,y)}\,dx\,dy\right| \quad \text{und} \quad \left|\int_{0+\delta_1}^{0+\varepsilon_1}\int_{0+\delta_2}^{N} x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-\varphi(x,y)}\,dx\,dy\right|$$

ihrem absoluten Betrage nach unter eine beliebig kleine Grenze herabsinken bei gleichzeitigem, von einander unabhängigen Grenzübergang $\lim \varepsilon = 0$ und $\lim \delta = 0$.

Daß dies aber in der Tat der Fall ist, solange wir für die Parameter μ und ν positive Werte, größer als die Einheit vorschreiben, läßt sich auf folgende Weise zeigen:

Da $e^{-\varphi(x,y)}$ in dem geforderten Bereich eine überall stetige Funktion ist, so können wir auf den Integranden $f(x,y)$, der ja als Produkt der beiden Funktionen $\psi_1(x,y) = x^{\mu-1} y^{\nu-1}$ und $\psi_2(x,y) = e^{-\varphi(x,y)}$ erscheint, den bekannten Mittelwertsatz für Doppelintegrale anwenden.

Dieser lautet bekanntlich:

„Ist $\psi_2(x,y)$ eine in einem gewissen Bereich B stetige und $\psi_1(x,y)$ eine durchaus positive Funktion der Variabeln x und y, so ist das Integral:

$$\iint_{(B)} \psi_1(x,y)\cdot\psi_2(x,y)\,dx\,dy = \psi_2(x_1,y_1)\iint_{(B)} \psi_1(x,y)\,dx\,dy,$$

wo (x_1, y_1) einen gewissen Punkt innerhalb des geforderten Bereiches B bezeichnet."

Nun ist $\psi_1(x,y) = x^{\mu-1}y^{\nu-1}$ eine durchaus positive Funktion nach pag. 14.

Wir erhalten demnach unter Anwendung des obigen Satzes für die beiden uneigentlichen Integrale (I) und (II) folgende Beziehung. Es ist:

$$\text{I.}\quad \left|\int_{0+\varepsilon_1}^{M}\int_{0+\delta_2}^{0+\varepsilon_2} x^{\mu-1}y^{\nu-1}e^{-\varphi(x,y)}\,dx\,dy\right| = |R_1|\cdot\left|\int_{\varepsilon_1}^{M} x^{\mu-1}dx\right|\cdot\left|\int_{\delta_2}^{\varepsilon_2} y^{\nu-1}dy\right|$$

$$= |R_1|\cdot\left|\frac{M^\mu-\varepsilon_1^\mu}{\mu+1}\right|\cdot\left|\frac{\varepsilon_2^\nu-\delta_2^\nu}{\nu+1}\right|$$

und:

$$\text{II.}\quad \left|\int_{0+\delta_1}^{0+\varepsilon_1}\int_{0+\delta_2}^{N} x^{\mu-1}y^{\nu-1}e^{-\varphi(x,y)}\,dx\,dy\right| = |R_2|\cdot\left|\int_{\delta_1}^{\varepsilon_1} x^{\mu-1}dx\right|\cdot\left|\int_{\delta_2}^{N} y^{\nu-1}dy\right|$$

$$= |R_2|\cdot\left|\frac{\varepsilon_1^\mu-\delta_1^\mu}{\mu+1}\right|\cdot\left|\frac{N^\nu-\delta_2^\nu}{\nu+1}\right|,$$

worin $R_1(x,y)$ bezw. $R_2(x,y)$ gewisse Werte bezeichnen, die die Funktion $e^{-\varphi(x,y)}$ in dem vorgeschriebenen Bereich annehmen kann.

Da nun $|R_1|$ und $|R_2|$ kleiner als die Einheit sind, erhalten wir die Ungleichungen:

$$\text{Ia.}\quad |R_1|\cdot\left|\frac{M^\mu-\varepsilon_1^\mu}{\mu+1}\right|\cdot\left|\frac{\varepsilon_2^\nu-\delta_2^\nu}{\nu+1}\right| < \left|\frac{M^\mu-\varepsilon_1^\mu}{\mu+1}\right|\cdot\left|\frac{\varepsilon_2^\nu-\delta_2^\nu}{\nu+1}\right|$$

und

$$\text{IIa.}\quad |R_2|\cdot\left|\frac{\varepsilon_1^\mu-\delta_1^\mu}{\mu+1}\right|\cdot\left|\frac{N^\nu-\delta_2^\nu}{\nu+1}\right| < \left|\frac{\varepsilon_1^\mu-\delta_1^\mu}{\mu+1}\right|\cdot\left|\frac{N^\nu-\delta_2^\nu}{\nu+1}\right|.$$

Der rechtsstehende Ausdruck dieser Ungleichungen wird aber jedenfalls bei gleichzeitig unaufhörlichem (und zwar unabhängig voneinander) abnehmenden ε und δ unter eine beliebig

kleine Größe herabsinken, solange wir für die Parameter μ und ν positive reelle Werte, größer als die Einheit voraussetzen.

Daher wird auch das Integral:

$$\int_0^M \int_0^N x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dx\, dy$$

seine Bedeutung nicht verlieren, obgleich die zu integrierende Funktion für die unteren Grenzen eine unendliche Diskontinuität aufweist.

Nehmen wir dagegen für μ und ν negative Werte an und solche kleiner als die Einheit, so sinken die uneigentlichen Integrale (I) und (II) nicht unter eine beliebig kleine Größe herab, und somit wird das vorgelegte Doppelintegral für diesen Fall sinnlos!

Dasselbe gilt auch für $\mu = 0$ und $\nu = 0$, denn hier erhalten wir die Ungleichungen (Ia) und (IIa) unter der Form:

$$|R_1| \cdot \left| \int_{\varepsilon_1}^{M} \frac{dx}{x} \right| \cdot \left| \int_{\delta_2}^{\varepsilon_2} \frac{dy}{y} \right| = |R_1| \cdot \left| \log \frac{M}{\varepsilon_1} \right| \cdot \left| \log \frac{\varepsilon_2}{\delta_2} \right| < \left| \log \frac{M}{\varepsilon_1} \right| \cdot \left| \log \frac{\varepsilon_2}{\delta_2} \right|$$

und

$$|R_2| \cdot \left| \int_{\delta_1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x} \right| \cdot \left| \int_{\delta_2}^{N} \frac{dy}{y} \right| = |R_2| \cdot \left| \log \frac{\varepsilon_1}{\delta_1} \right| \cdot \left| \log \frac{N}{\delta_2} \right| < \left| \log \frac{\varepsilon_1}{\delta_1} \right| \cdot \left| \log \frac{N}{\delta_2} \right| .$$

In diesen Ungleichungen wird aber der rechtsstehende Ausdruck bei gleichzeitig unaufhörlich abnehmenden ε bezw. δ nicht unter jede Grenze herabsinken, sondern unbestimmt werden und daher für negative Werte der Parameter μ und ν, kleiner als die Einheit und für $\mu = 0$ und $\nu = 0$ das gegebene Doppelintegral $E(\mu, \nu)$ ohne Bedeutung sein.

Fassen wir die vorangegangenen Untersuchungen noch einmal zusammen, so ist das Resultat, daß die vorgegebene Funktion:

$$E(\mu, \nu) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dx\, dy$$

hinsichtlich der unteren Grenzen wegen des Faktors $x^{\mu-1}y^{\nu-1}$ in dem Integranden nur für positive reelle Werte μ und ν und größer als die Einheit zu definieren ist, während $\mu = 0$ und $\nu = 0$, sowie μ und ν negativ und kleiner als die Einheit ausgeschlossen werden muß, weil für diese Werte dem Doppelintegral keinerlei Bedeutung mehr zukommt.

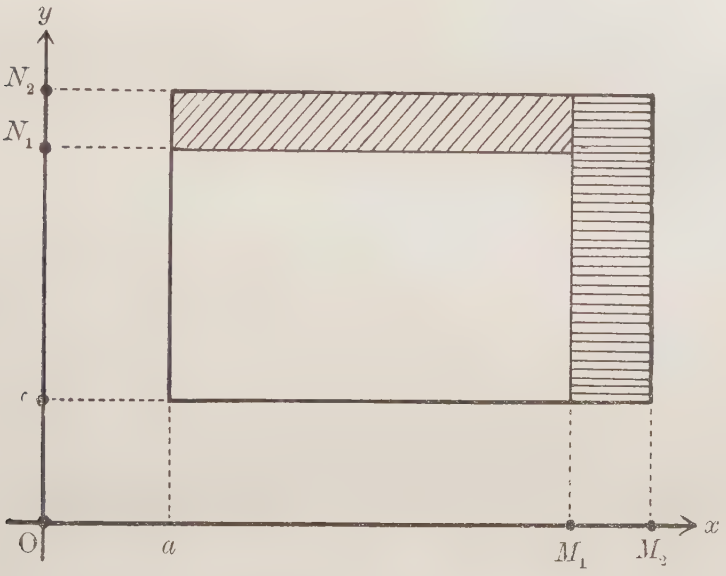

Fig. 2.

Daß der Integrand $f(x, y)$ für die unteren Grenzen $x = 0$ und $y = 0$ unendlich groß wird, ist aber nicht der einzige in Betracht kommende Fall, sondern es ist dabei noch zu erwägen, daß das Intervall, über das sich das Doppelintegral erstreckt, selbst unendlich groß ist! Auch dies könnte zur Folge haben, daß das Doppelintegral dadurch sinnlos würde.

Bekanntlich versteht man unter dem bestimmten Integral:

$$\int_a^{\infty}\int_c^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy$$

denjenigen Grenzwert, dem das zunächst zwischen den endlichen Grenzen a und M bezw. c und N genommene Integral

$$\int_a^M \int_c^N f(x, y)\, dx\, dy$$

sich nähert, wenn die beiden oberen Grenzen M und N ins Unendliche wachsen.

Auch hier wird, wie bei den vorangegangenen Untersuchungen über das Verhalten des Integrals bei einer unendlichen Diskontinuität der Funktion $f(x, y)$, die Hauptfrage darauf zu richten sein, ob bei fortwährendem, von einander unabhängigem Wachsen der beiden oberen Integrationsgrenzen die dadurch hervorgerufene Veränderung des Integrals:

$$\int_a^M \int_c^N f(x, y)\, dx\, dy$$

sich zuletzt von Null beliebig wenig unterscheidet.

Es handelt sich also darum, ob die Differenz, die diese Veränderung angibt, nämlich:

$$\left| \int_a^{M_2} \int_c^{N_2} f(x, y)\, dx\, dy - \int_a^{M_1} \int_c^{N_1} f(x, y)\, dx\, dy \right|,$$

abgesehen vom Vorzeichen, bei unaufhörlichem Wachsen der oberen Grenzen unter jede noch so kleine Größe herabsinkt.

Nach dieser ganz allgemeinen Methode läßt sich jedoch die vorliegende Frage nicht immer ohne weiteres erledigen; vielmehr führt gewöhnlich die Benutzung eines bekannten Satzes, des sogenannten Mittelwertsatzes, schneller und einfacher zum Ziele.

Für unseren vorliegenden Fall gibt das nachstehende Theorem ein Hilfsmittel an die Hand:

Kann man ein gegebenes Differential $f(x, y)\, dy\, dx$ nicht integrieren, so läßt sich oft eine obere Grenze angeben, unter der das bestimmte Integral:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy$$

liegt.

Zu diesem Zwecke nehmen wir eine Funktion $\varphi(x, y)$ von solcher Beschaffenheit an, daß für alle im geforderten Bereiche $< a, b; c, d >$ liegenden Werte der Variabeln x und y $\psi(x, y) > f(x, y)$ ist.

Dann gilt jedenfalls die Ungleichung:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy < \int_a^b \int_c^d \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Davon können wir für das vorliegende Differential:

$$f(x, y)\, dx\, dy = x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\, dx\, dy$$

Gebrauch machen.

Da $\varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ als positive definite Form II. Grades vorausgesetzt war, und wir uns außerdem nur auf positive Werte der Variabeln x und y beschränken, gilt bekanntlich die Ungleichung:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \geqq k(x^2 + y^2), \qquad k > 0,$$

wo k eine positive von den Koeffizienten a, b, c in gewisser Weise abhängige Konstante darstellt.

Demnach ist auch:

$$e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} < e^{-k(x^2+y^2)}$$

und weiterhin auch:

$$E(\mu, \nu) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\, dx\, dy$$

$$< \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-k(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

Der rechtsstehende Ausdruck stellt aber für $E(\mu, \nu)$ eine im I. Quadranten überall endliche und bestimmte obere Grenze dar; da hier die Variabeln getrennt vorkommen, ergibt sich diese sofort als Produkt zweier Gammafunktionen:

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-kx^2}\, dx \int_0^\infty y^{\nu-1} e^{-ky^2}\, dy = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{k^{\frac{\mu}{2}} \cdot k^{\frac{\nu}{2}}},$$

wie wir bereits früher gefunden hatten.

Nunmehr wären die analogen Betrachtungen bei dem zweiten vorgelegten Doppelintegral:

$$H(\mu, \nu, \varrho) = \int_0^1 \int_0^1 x^{\mu-1} y^{\nu-1} [1-(ax^2+2bxy+cy^2)]^{\varrho-1} dx\,dy$$

vorzunehmen.

Für die oberen Grenzen, die ja endliche Größen darstellen, können wir jedenfalls sagen, daß diese Funktion endlich und bestimmt bleibt.

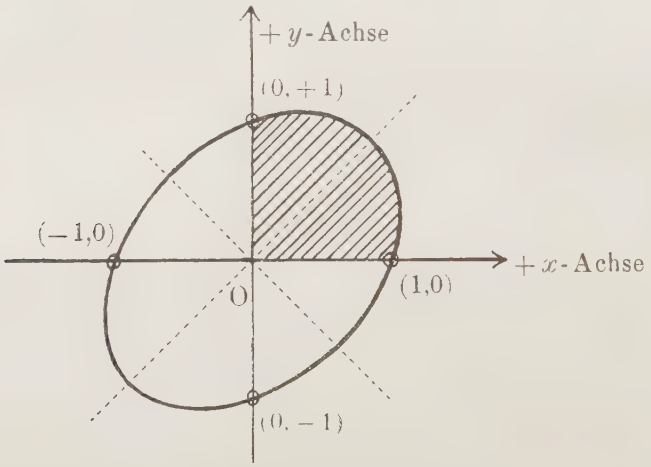

Fig. 3.

Für die unteren Grenzen müssen wir jedoch wegen des Faktors $x^{\mu-1}y^{\nu-1}$ aus ähnlichen Erwägungen wie für die Funktion $E(\mu, \nu)$ wieder voraussetzen, daß $\mu > 1$ und $\nu > 1$ bleiben.

Ferner wird es auch nötig sein, wegen des Faktors

$$[1-(ax^2+2bxy+cy^2)]^{\varrho-1}$$

bezw. in der Normalform:

$$[1-(x^2+2\beta xy+y^2)]^{\varrho-1}$$

das Maximum der positiven definiten Form $\varphi(x, y)$

$$\text{für } 0 \leqq x \leqq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leqq y \leqq 1$$

kleiner als die Einheit anzunehmen, weil sonst für die Werte $\varphi(x, y) > 1$ die Funktion $H(\mu, \nu, \varrho)$ komplex bezw. $1-x^2-y^2 = 0$

werden und damit eine Entwicklung der Funktion $H(\mu, \nu, \varrho)$ nach $\frac{2\beta}{1-x^2-y^2}$, von der in einem späteren Abschnitt Gebrauch gemacht werden soll, nicht ausführbar sein würde. Es ist vielmehr die Funktion $H(\mu, \nu, \varrho)$ für alle Werte der Variabeln $(x\ y)$, für die $0 \leqq x$ und $0 \leqq y$, sowie $1 \geqq \varphi(x, y)$ ist, über den zwischen der positiven x-Achse und der positiven y-Achse liegenden Teil der Ellipse $x^2 + y^2 + 2\beta xy = 1$ zu erstrecken, wie etwa nebenstehende Figur 3 angibt.

Wir definieren daher die beiden Funktionen:

$$E(\mu, \nu) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-\varphi(x,y)} dx\, dy$$

und

$$H(\mu, \nu, \varrho) = \int_0^1 \int_0^1 x^{\mu-1} y^{\nu-1} [1 - \varphi(x, y)]^{\varrho-1} dx\, dy$$

als endlich und bestimmt, wenn $\varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ eine positive definite Form II. Grades darstellt, die Parameter $\mu \geqq 1$; $\nu > 1$ und $\varrho > 1$ bleiben, und schließlich das Maximum der Form $\varphi(x, y)$ für $0 \leqq x \leqq 1$ und $0 \leqq y \leqq 1$ die Einheit nicht überschreitet.

§ 2.

Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen $E(\mu, \nu)$ und $H(\mu, \nu, \varrho)$.

Nachdem wir uns über die eindeutige Bestimmtheit der beiden Funktionen Klarheit verschafft haben, sind wir nun imstande, weitere interessante Eigenschaften für sie abzuleiten:

Bereits in den kurzen einleitenden Bemerkungen war auf die große Analogie hingewiesen worden, die unsere beiden zu untersuchenden Funktionen:

$$E(\mu, \nu) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-\varphi(x,y)} dx\, dy$$

und

$$H(\mu, \nu, \varrho) = \int_0^1 \int_0^1 x^{\mu-1} y^{\nu-1} [1 - \varphi(xy)]^{\varrho-1} dx\, dy$$

mit den beiden bekannten, für so viele Untersuchungen fruchtbar gewesenen Eulerschen Integralen:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx$$

und

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx$$

hatten.

In der Einleitung war ebenfalls schon auf die bekannte Relation zwischen diesen beiden Integralen:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

hingewiesen worden.

Es liegt nun die Vermutung nahe, ob es vielleicht möglich wäre, zwischen den beiden vorgelegten, den Eulerschen Integralen so analogen Funktionen $E(\mu,\nu)$ und $H(\mu,\nu,\varrho)$ eine ähnliche Beziehung herzuleiten, oder wenigstens zu versuchen eine solche aufzufinden.

Man wäre zunächst geneigt, eben wegen der großen Analogie mit den beiden Eulerschen Integralen, auch für die Ableitung des Zusammenhanges für die beiden Funktionen $E(\mu,\nu)$ und $H(\mu,\nu,\varrho)$ ähnliche Wege einzuschlagen, wie diese für das Γ- bezw. B-Integral in Anwendung gelangt sind.

Etwa wie Jacobi diesen Zusammenhang auffindet, indem er von dem Produkt zweier Gammafunktionen:

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q) = \int_0^\infty\int_0^\infty x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)}\, dx\, dy$$

ausgeht und nach der bekannten Transformation:

$$x = uv \text{ und } y = u(1-v)$$

nachweist, daß dieses Doppelintegral sich in das Produkt:

$$B(p+q)\cdot\Gamma(p+q)$$

spaltet.

Oder etwa wie Lejeune-Dirichlet, der von folgender Form des B-Integrals ausgeht:

$$B(p,q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\, dx$$

und dann mit Hilfe der bekannten Relation:

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-kx} dx = \frac{\Gamma(p)}{k^p}$$

ebenfalls zu dem Resultat:

$$\frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(p, q)$$

gelangt.

Wollte man nach den nur beiläufig von den verschiedenen Methoden hervorgehobenen Verfahren analog mit den vorgelegten Doppelintegralen $E(\mu, \nu)$ und $H(\mu, \nu, \varrho)$ vorgehen, so würde man insofern auf Schwierigkeiten stoßen, als wegen der als positiv definit vorausgesetzten Form II. Grades $\varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, die etwa vorzunehmenden Transformationen gewissen Bedingungen unterworfen werden müßten, die zwar einen analogen Weg vielleicht nicht unmöglich machen, aber doch immerhin einigermaßen erschweren würden.

Es wird daher angebracht sein, ein anderes Verfahren zu verwenden, das vielleicht nicht die Strenge des Beweises der vorangegangenen Vorschläge erreicht, aber dennoch zu einem interessanten Resultate führt, dessen Richtigkeit auch in anderen späteren Ergebnissen wieder augenscheinlich ist.

Ein bekanntes Hilfsmittel zur Bestimmung des Wertes eines vorgelegten Integrales:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy$$

bietet nun die Möglichkeit, die bestimmten Integrale in unendliche Reihen umzusetzen.

Läßt sich z. B. der eine der beiden Faktoren der zu integrierenden Funktion $f(x, y) = \varphi(x, y)\, \psi(xy)$ etwa $\varphi(x, y)$ in eine gleichmäßig konvergente Reihe

$$\varphi(xy) = u_0(x, y) + u_1(x, y) + u_2(x, y) + \dots$$

umwandeln, so können wir schreiben:

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\int_c^d u_0(xy)\cdot\psi(x,y)\,dx\,dy - \int_a^b\int_c^d u_1(xy)\cdot\psi(x,y)\,dx\,dy$$
$$+\int_a^b\int_c^d u_2(x,y)\cdot\psi(xy)\,dx\,dy + \ldots.$$

Stellen alsdann die Grenzen des Integrals zunächst endliche Größen dar, und bleibt der andere Faktor endlich, so ist auch jedesmal die durch die Integration erzielte Reihe konvergent und hat das vorgelegte Integral zur Summe.

Anders ist es jedoch, wenn, wie auch im vorliegenden Falle, die Integrationsgrenzen selbst unendlich groß werden. Es ist in diesem Falle streng genommen das Restglied der Reihe zu untersuchen und nachzuweisen, daß dieses für sehr große Werte des Reihenindex verschwindet.

Wir wollen nun versuchen, vermittels dieser Methode zunächst den Wert des Doppelintegrals $E(\mu,\nu)$ zu finden, ausgehend von der bereits im § 1 entwickelten „Normalform“:

$$E(\mu,\nu) = C\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\mu-1}y^{\nu-1}e^{-(x^2+2\beta xy+y^2)}\,dx\,dy,$$

in der bekanntlich

$$C = \frac{1}{a^{\frac{\mu}{2}}\,c^{\frac{\nu}{2}}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{ac}}$$

gesetzt war.

Den Faktor C können wir zunächst unbeachtet lassen, da er für die folgende Rechnung ohne Einfluß ist.

In der Tat läßt sich hierin der Faktor $e^{-2\beta xy}$ in eine im I. Quadranten überall konvergente Reihe umwandeln, da ja:

$$e^{-2\beta xy} = 1 - \frac{2xy}{1!}\beta + \frac{2^2x^2y^2}{2!}\beta^2 - \frac{2^3x^3y^3}{3!} \pm \ldots \qquad \text{ist.}$$

Wir erhalten demnach für $E(\mu,\nu)$:

$$E(\mu,\nu) = \int_0^\infty\int_0^\infty x^{\mu-1}y^{\nu-1}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy - \frac{2\beta}{1!}\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\mu}y^{\nu}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$
$$+\frac{2^2\beta^2}{2!}\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\mu+1}y^{\nu+1}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy - \ldots.$$

Bezeichnen wir abkürzend:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \varphi(\mu, \nu),$$

so ist:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu} y^{\nu} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \varphi(\mu+1,\ \nu+1)$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu+1} y^{\nu+1} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \varphi(\mu+2,\ \nu+2)$$

. . . . . .

und wir erhalten für die Funktion $E(\mu, \nu)$ folgende Reihenentwicklung:

$$(1.) \quad E(\mu, \nu) = \varphi(\mu, \nu) - \frac{2^2}{1!}\varphi(\mu+1,\ \nu+1) + \frac{2^2 2^2}{2!}\varphi(\mu+2,\ \nu+2) - \ldots$$

Nach den vorangegangenen Bemerkungen über die Darstellung eines Integrals durch eine unendliche Reihe, deren Summe das betreffende Integral bildet, wäre es nun die nächste Aufgabe nachzuweisen, daß das Restglied dieser Entwicklung für eine hinreichend große Zahl von Gliedern sich mehr und mehr der Null nähert, falls diese Entwicklung mit Recht bestehen sollte. Jedoch ist es bisher eingehenden Untersuchungen noch nicht gelungen, einen Nachweis für diese Bedingung zu finden. Wir werden zwar im folgenden bald sehen, daß es allerdings möglich ist, dieses Restglied in einer verhältnismäßig einfachen Form darzustellen, aber dennoch scheint der Nachweis für das Verschwinden des Restgliedes nicht unerhebliche Schwierigkeiten in sich zu bergen.

Obgleich nun, streng genommen, dieser Nachweis für die Richtigkeit der nachstehenden Entwicklungen unerläßlich wäre, so soll doch davon abgesehen werden, zumal es im folgenden gelingen wird, die auf die nachstehende Art erhaltenen und nicht uninteressanten Zusammenhangsformeln für die beiden Funktionen $E(\mu, \nu)$ und $H(\mu, \nu, \varrho)$ auf einem zweiten völlig abweichenden Wege abermals herzuleiten.

Vielleicht bleibt es späteren Betrachtungen vorbehalten, in die Untersuchung des vorliegenden Restgliedes Klarheit zu bringen.

Die weitere Aufgabe wird es nun sein, in der Gleichung (1) die Funktionen $\varphi(\mu+1, \nu+1)$; $\varphi(\mu+2, \nu+2)$ ... usw. auf die Funktion $\varphi(\mu, \nu)$ zurückzuführen, sodaß wir auf der rechten Seite der Gleichung diese Funktion als Faktor herausziehen können, und dann nur noch eine Potenzentwicklung in β übrig bleibt, die wir zu summieren versuchen müssen.

Nun ist aber die Funktion:

$$\varphi(\mu,\nu)=\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\mu-1}y^{\nu-1}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

der Spezialfall der Funktion $E(\mu, \nu)$, den wir bereits anfangs erwähnt haben.

Dieses Doppelintegral ließ sich ja bekanntlich einfach als Produkt zweier Gammafunktionen ansehen, sodaß wir erhielten:

(2)
$$\left\{\begin{array}{l}
\varphi(\mu,\nu)=\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x^2}dx\times\int_0^\infty y^{\nu-1}e^{-y^2}dy=\frac{1}{4}\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\\[2ex]
\varphi(\mu+1,\nu+1)=\int_0^\infty x^{\mu}e^{-x^2}dx\times\int_0^\infty y^{\nu}e^{-y^2}dy=\frac{1}{4}\,\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\\[2ex]
\varphi(\mu+2,\nu+2)=\int_0^\infty x^{\mu+1}e^{-x^2}dx\times\int_0^\infty y^{\mu+1}e^{-y^2}dy=\frac{1}{4}\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)\\[2ex]
\qquad\qquad=\frac{1}{4}\,\frac{\mu}{2}\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\,\frac{\nu}{2}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\\[2ex]
\varphi(\mu+3,\nu+3)=\int_0^\infty x^{\mu+2}e^{-x^2}dx\times\int_0^\infty y^{\nu+2}e^{-y^2}dy=\frac{1}{4}\,\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}+1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}+1\right)\\[2ex]
\qquad\qquad=\frac{1}{4}\,\frac{\mu+1}{2}\,\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\,\frac{\nu+1}{2}\,\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\\[2ex]
\varphi(\mu+4,\nu+4)=\ldots\ldots=\frac{1}{4}\,\frac{\mu}{2}\left(\frac{\mu}{2}+1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\,\frac{\nu}{2}\left(\frac{\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\\[2ex]
\varphi(\mu+5,\nu+5)=\ldots\ldots=\frac{1}{4}\,\frac{\mu+1}{2}\left(\frac{\mu+1}{2}+1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\cdot\frac{\nu+1}{2}\left(\frac{\nu+1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\\[2ex]
\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Eine nähere Betrachtung der auf diese Weise gefundenen Werte der Funktionen $\varphi(\mu, \nu)$; $\varphi(\mu+1, \nu+1) \ldots$ zeigt, daß diejenigen Funktionen $\varphi(\mu, \nu)$, deren Argumente um gerade ganzzahlige Werte zunehmen, sich durch die gemeinsamen Faktoren $\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)$, diejenigen Funktionen $\varphi(\mu, \nu)$ jedoch, deren Argumente um ungerade ganze Zahlen wachsen, sich durch den gemeinsamen Faktor $\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)$ unterscheiden.

Nach diesen vorangegangenen Ergebnissen wäre es vielleicht möglich, das Restglied der obigen Reihenentwicklung auf folgende Weise zu bestimmen.

Es ist nämlich dabei angebracht, um eine einfache Darstellung zu erhalten, zwei aufeinander folgende Glieder, nämlich mit geradem und ungeradem Index, zu nehmen, etwa:

$$R_{2n} = \frac{2^{2n}\beta^{2n}}{(2n)!} \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu+2n-1} y^{\nu+2n-1} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$$

und

$$R_{2n+1} = \frac{2^{2n+1}\beta^{2n+1}}{2(n+1)!} \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu+(2n+1)-1} y^{\nu+(2n+1)-1} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy.$$

Wir erhalten dann offenbar nach einander:

für $n = 0$ wird:

$$R_{2n} \text{ zu } R_0 = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\mu+0}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu+0}{2}\right),$$

$$R_{2n+1} \text{ zu } R_1 = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \cdot \frac{2\beta}{1!}$$

$$= \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\mu+1+0}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu+1+0}{2}\right) \cdot \frac{2\beta}{1!},$$

für $n = 1$ wird:

$$R_{2n} \text{ zu } R_2 = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+1\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right) \cdot \frac{2^2\beta^2}{2!}$$

$$= \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\mu+2\cdot 1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu+2\cdot 1}{2}\right) \cdot \frac{2^2\beta^2}{2!},$$

$$R_{2n+1} \text{ zu } R_3 = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}+1\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}+1\right) \cdot \frac{2^3\beta^3}{3!}$$

$$= \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\mu+1+2\cdot 1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu+1+2\cdot 1}{2}\right) \cdot \frac{2^3\beta^3}{3!}$$

. . . . . .

für $n = n$ wird:

$$R_{2n} = \frac{1}{4} \cdot \Gamma\left(\frac{\mu + 2 \cdot n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu + 2 \cdot n}{2}\right) \frac{2^{2n} \beta^{2n}}{(2n)!}$$
$$= \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + n\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + n\right) \cdot \frac{2^{2n} \beta^{2n}}{(2n)!}$$

und

$$R_{2n+1} = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{\mu + 1 + 2 \cdot n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu + 1 + 2 \cdot n}{2}\right) \cdot \frac{2^{2n+1} \beta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$= \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{\mu + 1}{2} + n\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu + 1}{2} + n\right) \frac{2^{2n+1} \beta^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

An diese Darstellung der Restglieder der Gleichung (1) wäre nun anzuknüpfen und nachzuweisen, daß sie für hinreichend große Werte von n der Null beliebig nahe kommen.

Es ist vielleicht nicht ausgeschlossen, daß dabei die bekannte Relation:

$$\Gamma(a + n) = \sqrt{2\pi}\, n^{a+n-\frac{1}{2}} e^{-n} (1 + \varepsilon_n),$$

wo ε_n eine mit wachsenden n verschwindende Größe ist, von Nutzen sein wird. Jedoch ist es, wie schon gesagt, den bisherigen Versuchen nicht gelungen, eine befriedigende Lösung zu erreichen.

Nach diesen Bemerkungen kehren wir wieder zu den Darstellungen (2) für die Funktionen $\varphi(\mu, \nu)$; $\varphi(\mu + 1, \nu + 1) \ldots$ zurück.

Da nun bekanntlich die Entwicklung für die Exponentialfunktion $e^{-2\beta xy}$ für alle Werte von β unbedingt konvergiert, so ist es jedenfalls gestattet, in der unendlichen Reihenentwicklung (1) die geraden und ungeraden Potenzen von β zusammenzufassen, so daß wir demnach für die vorgelegte Funktion $E(\mu, \nu)$ folgendes Resultat erhalten:

$$(3) \quad \begin{cases} E(\mu, \nu) = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \left\{1 + \frac{2^2 \beta^2}{2!} \frac{\mu}{2} \cdot \frac{\nu}{2} \right. \\ \qquad \left. + \frac{2^4 \beta^4}{4!} \frac{\mu}{2} \left(\frac{\mu}{2} + 1\right) \frac{\nu}{2} \left(\frac{\nu}{2} + 1\right) + \ldots \right\} \\ \quad - \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{\mu + 1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu + 1}{2}\right) 2\beta \left\{1 + \frac{2^2 \beta^2}{3!} \left(\frac{\mu + 1}{2}\right) \left(\frac{\nu + 1}{2}\right) \right. \\ \qquad \left. + \frac{2^4 \beta^4}{5!} \frac{\mu + 1}{2} \left(\frac{\mu + 1}{2} + 1\right) \frac{\nu + 1}{2} \left(\frac{\nu + 1}{2} + 1\right) + \ldots \right\}. \end{cases}$$

Nun lassen sich aber die beiden unendlichen Reihen in den geschweiften Klammern mit Hilfe der bekannten Gaußschen hypergeometrischen Reihe summieren.

Mit Gauß (cf. Ges. Werke, Bd. III, Disquisitiones generales circa seriem infinitam.) definieren wir:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma\cdot 1}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot 1\cdot 2}x^2$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots$$

für alle Werte $|x|<1$.

Setzen wir hierin zunächst

$$\alpha=\frac{\mu}{2};\quad \beta=\frac{\nu}{2};\quad \gamma=\frac{1}{2}\quad\text{und}\quad x=\frac{2\beta\cdot 2\beta}{2\cdot 2},$$

so ist:

$$F\left(\frac{\mu}{2},\ \frac{\nu}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{2\beta\cdot 2\beta}{2\cdot 2}\right)=1+\frac{\mu}{2}\cdot\frac{\nu}{2}\cdot\frac{2^2\beta^2}{1\cdot 2}$$
$$+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\mu}{2}+1\right)\frac{\nu}{2}\left(\frac{\nu}{2}+1\right)\cdot\frac{2^4\beta^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots.$$

Setzen wir zweitens:

$$\alpha=\frac{\mu+1}{2};\quad \beta=\frac{\nu+1}{2};\quad \gamma=\frac{3}{2}\quad\text{und}\quad x=\frac{2\beta\cdot 2\beta}{2\cdot 2},$$

so ist:

$$F\left(\frac{\mu+1}{2},\ \frac{\nu+1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{2\beta\cdot 2\beta}{2\cdot 2}\right)=1+\frac{\mu+1}{2}\cdot\frac{\nu+1}{2}\cdot\frac{2^2\beta^2}{3!}$$
$$+\frac{\mu+1}{2}\left(\frac{\mu+1}{2}+1\right)\frac{\nu+1}{2}\left(\frac{\nu+1}{2}+1\right)\frac{2^4\beta^4}{4!}+\cdots.$$

Demnach erhalten wir für die Funktion $E(\mu,\nu)$ folgende Darstellung:

$$(4)\quad\begin{cases} E(\mu,\nu)=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)F\left(\frac{\mu}{2},\ \frac{\nu}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{2\beta\cdot 2\beta}{2\cdot 2}\right) \\ \qquad -\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)2\beta F\left(\frac{\mu+1}{2},\ \frac{\nu+1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{2\beta\cdot 2\beta}{2\cdot 2}\right). \end{cases}$$

Und wenn wir den bisher vernachlässigten Faktor

$$C=\frac{1}{a^{\frac{\mu}{2}}\cdot c^{\frac{\nu}{2}}}$$

wieder einführen, erhalten wir:

$$E(\mu,\nu)=\frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{a^{\frac{\mu}{2}}\cdot c^{\frac{\nu}{2}}}F\left(\frac{\mu}{2},\ \frac{\nu}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{2\beta\cdot 2\beta}{2\cdot 2}\right)$$

(4a)

$$-\frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{a^{\frac{\mu}{2}}c^{\frac{\nu}{2}}}\cdot 2\beta F\left(\frac{\mu+1}{2},\ \frac{\nu+1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{2\beta\cdot 2\beta}{2\cdot 2}\right).$$

Dabei ist jedoch zu beachten, daß die erwähnte hypergeometrische Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ für alle Werte $|x|<1$ konvergiert. Es wird demnach die Summierung der beiden vorliegenden Potenzreihen in β nur dann möglich sein, solange $|\beta|<1$ ist. Diese Bedingung wird aber in der Tat von β erfüllt. Erinnern wir uns des Umstandes, daß $\beta=\frac{b}{\sqrt{a\cdot c}}$ war, so ist dieser Ausdruck tatsächlich kleiner als die Einheit. Denn es war ja ausdrücklich für die binäre quadratische Form

$$\varphi(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$$

die Voraussetzung gemacht, daß dies eine positive definite Form II. Grades sein sollte. Für eine solche wesentlich positive Form ist, wie bereits im § 1 gezeigt wurde, die Determinante $\Delta=ac-b^2>0$ d. h. positiv, und daher sind auch die Koeffizienten a und c positive Größen. Daher haben auch die Größen $\sqrt{a}$ und $\sqrt{c}$ sowie $\sqrt{\Delta}$ von Null verschiedene reelle Werte, die wir uns positiv denken wollen. Der Quotient $\frac{ac-b^2}{ac}$ ist dann ein nie verschwindender positiver echter Bruch, der für $b=0$ der Einheit gleichkommt, und deshalb hat auch die Größe $\beta=\frac{b}{\sqrt{a\cdot c}}$ einen (positiven oder negativen) für $b=0$ verschwindenden, aber niemals die Einheit erreichenden Wert, d. h. es ist stets $\beta<1$, wie es für die obigen hypergeometrischen Reihen verlangt wird.

Aus diesem Grunde ist denn auch für $\varphi(x,y)$ die indefinite Form auszuschließen, weil für diesen Fall $\beta>1$ ist und daher in der obigen Entwicklung die Verwendung der hypergeometrischen Reihe nicht gestattet wäre.

Um nun den gesuchten Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen $E(\mu, \nu)$ und $H(\mu, \nu, \varrho)$ zu erlangen, wollen wir das zweite Doppelintegral:

$$H(\mu, \nu, \varrho) = \int_0^1 \int_0^1 x^{\mu-1} y^{\nu-1} [1 - (ax^2 + 2bxy + cy^2)]^{\varrho-1} dx\, dy$$

oder in der „Normalform“

$$H(\mu, \nu, \varrho) = C \int_0^{\sqrt{a}} \int_0^{\sqrt{c}} x^{\mu-1} y^{\nu-1} [1 - (x^2 + 2\beta xy + y^2)]^{\varrho-1} dx\, dy$$

in ganz analoger Weise behandeln, wie es soeben mit der Funktion $E(\mu, \nu)$ geschehen ist.

Wir wenden also wieder in der bereits erwähnten Art unter dem Integralzeichen auf den Faktor:

$$[1 - (x^2 + 2\beta xy + y^2)]^{\varrho-1} = (1 - x^2 - y^2)^{\varrho-1} \left(1 - \frac{2xy}{1 - x^2 - y^2} \beta\right)^{\varrho-1}$$

eine Entwicklung nach steigenden Potenzen von β an, was gestattet ist, falls diese Reihe für alle Werte des vorgeschriebenen Intervalles konvergent ist.

Nach der bekannten Entwicklung des Binoms erhalten wir dann für alle Werte von $|\beta| < 1$, was ja in der Tat stattfindet wegen der Voraussetzung der positiven definiten Form $\varphi(x, y)$, wie wir bereits oben gesehen haben, folgende Reihenentwicklung:

$$[1 - (x^2 + 2\beta xy + y^2)]^{\varrho-1} = (1 - x^2 - y^2)^{\varrho-1} \left\{1 - \binom{\varrho-1}{1} \frac{x \cdot y \cdot 2\beta}{(1 - x^2 - y^2)} + \binom{\varrho-1}{2} \frac{x^2 \cdot y^2 \cdot 2^2 \beta^2}{(1 - x^2 - y^2)^2} - \cdots\right\}.$$

Und demnach erhalten wir für das Doppelintegral (falls wir $\sqrt{a} = \alpha$ und $\sqrt{c} = \gamma$ setzen):

$$H(\mu, \nu, \varrho) = \int_0^\alpha \int_0^\gamma x^{\mu-1} y^{\nu-1} (1 - x^2 - y^2)^{\varrho-1} dx\, dy$$
$$- \binom{\varrho-1}{1} 2\beta \int_0^\alpha \int_0^\gamma x^\mu y^\nu (1 - x^2 - y^2)^{\varrho-2} dx\, dy$$
$$+ \binom{\varrho-1}{2} 2^2 \beta^2 \int_0^\alpha \int_0^\gamma x^{\mu+1} y^{\nu+1} (1 - x^2 - y^2)^{\varrho-3} dx\, dy.$$

Streng genommen müßte, auch wie vorher bei der Funktion $E(\mu, \nu)$, nachgewiesen werden, daß die durch die Integration der einzelnen Glieder entstehende Reihe wieder konvergent ist; aber auch dieser Nachweis begegnet ähnlichen Schwierigkeiten wie für die Funktion $E(\mu, \nu)$.

Es werden nun zunächst die einzelnen Integrale näher zu bestimmen sein:

Es ist bekanntlich:

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} \int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{n}\right) dx\, dy = \int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Demnach erhalten wir, wenn wir in den obigen einzelnen Integralen $m = a^{-\frac{1}{2}}$ und $n = c^{-\frac{1}{2}}$ setzen.

$$\int_{0}^{\sqrt{a}} \int_{0}^{\sqrt{c}} x^{\mu-1} y^{\nu-1} (1 - x^2 - y^2)^{\varrho-1} dx\, dy$$
$$= a^{-\frac{\mu}{2}} c^{-\frac{\nu}{2}} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} x^{\mu-1} y^{\nu-1} (1 - ax^2 - cy^2)^{\varrho-1} dx\, dy$$

$$\int_{0}^{\sqrt{a}} \int_{0}^{\sqrt{c}} x^{\mu} y^{\nu} (1 - x^2 - y^2)^{\varrho-2} dx\, dy$$
$$= a^{-\frac{\mu+1}{2}} c^{-\frac{\nu+1}{2}} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} x^{\mu} y^{\nu} (1 - ax^2 - cy^2)^{\varrho-2} dx\, dy$$

. . . . . .

Bezeichnen wir daher abkürzend:

$$\psi(\mu, \nu, \varrho) = a^{-\frac{\mu}{2}} c^{-\frac{\nu}{2}} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} x^{\mu-1} y^{\nu-1} (1 - ax^2 - cy^2)^{\varrho-1} dx\, dy$$

$$\psi(\mu+1, \nu+1, \varrho-1) = a^{-\frac{\mu+1}{2}} c^{-\frac{\nu+1}{2}} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} x^{\mu} y^{\nu} (1 - ax^2 - cy^2)^{\varrho-2} dx\, dy$$

$$\psi(\mu+2, \nu+2, \varrho-2) = a^{-\frac{\mu+2}{2}} c^{-\frac{\nu+2}{2}} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} x^{\mu+1} y^{\nu+1} (1 - ax^2 - cy^2)^{\varrho-3} dx\, dy.$$

. . . . . .

so erhalten wir für das zweite Doppelintegral $H(\mu, \nu, \varrho)$ nunmehr folgende unendliche Reihenentwicklung:

$$(5)\quad \begin{cases} H(\mu,\nu,\varrho) = \psi(\mu,\nu,\varrho) - \binom{\varrho-1}{1} 2\beta\psi(\mu+1,\nu+1,\varrho-1) \\ \qquad + \binom{\varrho-1}{2} 2^2\beta^2\psi(\mu+2,\nu+2,\varrho-2) - \dots \end{cases}$$

Es ist nun hier, ähnlich wie in der Entwicklung (1) für $E(\mu, \nu)$, zu versuchen, die einzelnen Funktionen $\psi(\mu, \nu, \varrho)$, $\psi(\mu+1, \nu+1, \varrho-1)\dots$ usw. zu ermitteln und aufeinander zu beziehen, sodaß rechts schließlich nur noch eine Potenzentwicklung in β steht, die wir zu summieren haben.

Zur Ermittlung der einzelnen Funktionen $\psi(\mu, \nu, \varrho)$ dient nun ein bekanntes Theorem, das Liouville im Journal de mathém. t. 4, pag. 225ff. veröffentlicht hat:

Es ist das mehrfache Integral:

$$\underbrace{\int\int\int\int\dots}_{0}^{\infty} f\left[\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r - \dots\right] x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \dots dx\, dy\, dz$$

$$= \frac{\alpha^a \beta^b \gamma^c \dots}{p \cdot q \cdot r \dots} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{b}{q}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{c}{r}\right) \dots}{\Gamma\left[\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \dots\right]} \cdot \int_0^h f(\vartheta)\, \vartheta^{\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} - \dots - 1} d\vartheta,$$

in welcher Formel die Parameter $a, b, c\dots$; $\alpha, \beta, \gamma\dots$ sämtlich positiv sind, und in der man die Integration über alle positiven Werte der Variabeln $x, y, z\dots$ zu erstrecken hat, die der Bedingung:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r + \dots < h$$

genügen.

Von dieser allgemeinen Relation können wir für die Ermittlung der einzelnen Funktionen $\psi(\mu, \nu, \varrho)$ Nutzen ziehen.

Wir erhalten nämlich für

$$\alpha = a^{-\frac{1}{2}};\ \beta = c^{-\frac{1}{2}};\ a = \mu;\ b = \nu,\ p = q = 2 \text{ und } h = 1$$

und für

$$f\left[\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \dots^q\right] = \left[1 - \left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{c}}}\right)^2\right]^{\varrho-1}$$

und unter der Bedingung

$$\left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)^2+\left(\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{c}}}\right)^2<1,$$

daß

$$\psi(\mu,\nu,\varrho)=a^{\frac{\mu}{2}}\cdot c^{\frac{\nu}{2}}\int_0^1\int_0^1 x^{\mu-1}y^{\nu-1}\left[1-\left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)^2-\left(\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{c}}}\right)^2\right]^{\varrho-1}dx\,dy$$

$$=\frac{a^{\frac{\mu}{2}}c^{\frac{\nu}{2}}a^{-\frac{\mu}{2}}c^{-\frac{\nu}{2}}}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}\cdot\int_0^1(1-\vartheta)^{\varrho-1}\vartheta^{\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-1}d\vartheta$$

ist, und da bekanntlich:

$$\int_0^1(1-\vartheta)^{\varrho-1}\vartheta^{\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-1}d\vartheta=B\left(\varrho,\frac{\mu+\nu}{2}\right)=\frac{\Gamma(\varrho)\cdot\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\varrho\right)}$$

ist, so folgt weiterhin, daß die Funktion:

$$\psi(\mu,\nu,\varrho)=\frac{1}{4}\,\frac{\Gamma(\varrho)\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)}$$

wird. Die Bedingung:

$$\left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)^2+\left(\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{c}}}\right)^2<1$$

sagt dabei aus, daß für die positiven Variabeln x und y alle diejenigen Werte zu nehmen sind, die im Innern (Grenze ausgeschlossen) derjenigen Ellipse liegen, die die Halbachsen $\frac{1}{\sqrt{a}}$ und $\frac{1}{\sqrt{c}}$ hat, und deren Mittelpunkt im Ursprung liegt.

Nach diesem soeben erwähnten Verfahren von Liouville erhalten wir für die weiteren Funktionen $\psi(\mu,\nu,\varrho)$ folgende Ausdrücke:

$$\psi(\mu+1, \nu+1, \varrho-1) = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma(\varrho-1)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)}$$

$$\psi(\mu+2, \nu+2, \varrho-2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right) \cdot \Gamma(\varrho-2)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\frac{\mu}{2} \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \cdot \frac{\nu}{2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma(\varrho-2)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)}$$

$$\psi(\mu+3, \nu+3, \varrho-3) = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}+1\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}+1\right) \Gamma(\varrho-3)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\frac{\mu+1}{2} \Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) \cdot \frac{\nu+1}{2} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma(\varrho-3)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)}$$

. . . . . usw.

Diese Resultate lassen sich aber noch in etwas vereinfachter Form schreiben:

Es gilt bekanntlich für alle Werte $\varrho > 1$ die Relation:

$$\Gamma(\varrho) = (\varrho-1)\,\Gamma(\varrho-1) \qquad \varrho > 1.$$

Aus dieser Rekursionsformel folgt, wenn n eine ganze positive Zahl kleiner als ϱ bedeutet:

$$\Gamma(\varrho) = (\varrho-1)(\varrho-2)\ldots(\varrho-n)\,\Gamma(\varrho-n).$$

Vermittels dieses Resultates ist:

$$\Gamma(\varrho-1) = \frac{1}{\varrho-1}\,\Gamma(\varrho), \qquad \varrho > 1$$

$$\Gamma(\varrho-2) = \frac{1}{\varrho-1} \cdot \frac{1}{\varrho-2} \cdot \Gamma(\varrho) \qquad \varrho > 2$$

$$\Gamma(\varrho-3) = \frac{1}{\varrho-1} \cdot \frac{1}{\varrho-2} \cdot \frac{1}{\varrho-3}\,\Gamma(\varrho), \qquad \varrho > 3$$

. . . . . .

Wegen dieser Darstellung sind aber für ϱ alle ganzen positiven Zahlen auszuschließen, weil für solche Werte die Faktoren

$$\frac{1}{\varrho-1}\cdot\frac{1}{\varrho-2}\cdots$$

sämtlich unendlich groß werden.

Außerdem ist für ϱ zunächst eine endliche Zahl anzunehmen, weil die Relation:

$$\Gamma(\varrho)=(\varrho-1)(\varrho-2)\ldots(\varrho-n)\,\Gamma(\varrho)$$

nur für endliche Werte von n ihre Geltung beibehält.

Wir können also wegen dieser Resultate die obigen Funktionen $\psi(\mu,\nu,\varrho)$; $\psi(\mu+1,\nu+1,\varrho-1)\ldots$ usw. nunmehr folgendermaßen schreiben:

$$\psi(\mu,\nu,\varrho)=\frac{1}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\cdot\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)}$$

$$\psi(\mu+1,\nu+1,\varrho-1)=\frac{1}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\cdot\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)}\cdot\frac{1}{\varrho-1}$$

(6)

$$\psi(\mu+2,\nu+2,\varrho-2)=\frac{1}{4}\,\frac{\mu}{2}\cdot\frac{\nu}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\cdot\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)}\cdot\frac{1}{\varrho-1}\cdot\frac{1}{\varrho-2}$$

$$\psi(\mu+3,\nu+3,\varrho-3)=\frac{1}{4}\,\frac{\mu+1}{2}\cdot\frac{\nu+1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\cdot\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)}\cdot\frac{1}{\varrho-1}\cdot\frac{1}{\varrho-2}\cdot\frac{1}{\varrho-3}$$

. . . . . .

Ganz analog, wie bei der vorangegangenen Reihenentwicklung der Funktion $E(\mu,\nu)$ sehen wir nun auch hier, daß diejenigen Funktionen $\psi(\mu,\nu,\varrho)$, deren Argumente um ungerade ganze Zahlen sich ändern, den gemeinsamen Faktor $\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)$, dagegen diejenigen Funktionen $\psi(\mu,\nu,\varrho)$, deren Argumente um gerade ganzzahlige Werte verändert werden, den gemeinsamen Faktor $\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)$ haben.

Da aber bekanntlich die Entwicklung des Binoms $(1-x^2-2\beta xy-y^2)^{\varrho-1}$ nach steigenden Potenzen von β für

alle Werte $|\beta|<1$ eine unbedingt konvergente ist, — was in der Tat stattfindet, da wegen der Voraussetzung von $\varphi(x,y)$ als positive definite Form, β stets kleiner als die Einheit bleibt, wie wir bereits nachgewiesen hatten —, so können wir, ohne einen Fehler zu begehen, die geraden und ungeraden Potenzen von β für sich zusammenfassen, und erhalten somit für die Funktion $H(\mu,\nu,\varrho)$ nunmehr folgende Reihenentwicklung

$$\text{(5a)}\quad \begin{cases} H(\mu,\nu,\varrho)=\Big[\psi(\mu,\nu,\varrho)+\binom{\varrho}{2}\psi(\mu+2,\nu+2,\varrho-2)\,2^2\beta^2+\dots \\ -2\beta\Big[\binom{\varrho-1}{1}\psi(\mu+1,\nu+1,\varrho-1)+\binom{\varrho-1}{3}\psi(\mu+3,\nu+3,\varrho-3)\,2^2\beta^2+\dots \end{cases}$$

Beachten wir ferner die folgenden bekannten Relationen:

$$\binom{\varrho-1}{1}=\frac{\varrho-1}{1}\,;\quad \binom{\varrho-1}{2}=\frac{(\varrho-1)(\varrho-2)}{1\cdot 2}\,;$$

$$\binom{\varrho-1}{3}=\frac{(\varrho-1)(\varrho-2)(\varrho-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\quad\dots\text{ usw.}$$

und setzen wir in (5a) die für die Funktionen $\psi(\mu,\nu,\varrho)$; $\psi(\mu+1,\nu+1,\varrho-1)\dots$ usw. erhaltenen Ausdrücke (6) ein, so folgt schließlich:

$$\text{(7)}\quad \begin{cases} H(\mu,\nu,\varrho)=\dfrac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)}\Bigg\{\dfrac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{1}\Big[1+\frac{\mu}{2}\cdot\frac{\nu}{2}\cdot\frac{2^2\beta^2}{2!}+\dots\Big] \\ \qquad 2\beta\,\dfrac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{1}\Big[1+\frac{\mu+1}{2}\cdot\frac{\nu+1}{2}\cdot\frac{2^2\beta^2}{3!}+\dots\Big]\Bigg\} \end{cases}$$

Da wir aber gefunden hatten, daß:

$$F\Big(\frac{\mu}{2},\frac{\nu}{2},\frac{1}{2},\frac{2\beta\cdot 2\beta}{2\cdot 2}\Big)=1+\frac{\mu}{2}\cdot\frac{\nu}{2}\cdot\frac{2^2\beta^2}{2!}+\frac{\mu}{2}\Big(\frac{\mu}{2}+1\Big)\frac{\nu}{2}\Big(\frac{\nu}{2}+1\Big)\frac{2^4\beta^4}{4!}+\dots$$

und

$$F\Big(\frac{\mu+1}{2},\frac{\nu+1}{2},\frac{3}{2},\frac{2\beta\cdot 2\beta}{2\cdot 2}\Big)=1+\frac{\mu+1}{2}\cdot\frac{\nu+1}{2}\cdot\frac{2^2\beta^2}{3!}+\frac{\mu+1}{2}\Big(\frac{\mu+1}{2}+1\Big)\frac{\nu+1}{2}\Big(\frac{\nu+1}{2}+1\Big)\frac{2^4\beta^4}{5!}+\dots$$

war, so erhalten wir für das Doppelintegral $H(\mu, \nu, \varrho)$ schließlich folgende Darstellung:

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} H(\mu,\nu,\varrho) = \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)} \Bigg\{ & \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{4} F\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2\beta\cdot 2\beta}{2\cdot 2}\right) \\ & - 2\beta\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{4} F\left(\frac{\mu+1}{2}, \frac{\nu+1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2\beta\cdot 2\beta}{2\cdot 2}\right)\Bigg\}. \end{aligned} \right.$$

Oder, wenn wir wieder den Faktor

$$C = \frac{1}{a^{\frac{\mu}{2}}\cdot c^{\frac{\nu}{2}}}$$

berücksichtigen, der ja für die vorangegangenen Rechnungen ohne Einfluß war, so ist:

$$(8a)\quad \left\{ \begin{aligned} H(\mu,\nu,\varrho) = \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)} \Bigg\{ & \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{4a^{\frac{\mu}{2}}\cdot c^{\frac{\nu}{2}}} F\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2\beta\cdot 2\beta}{2\cdot 2}\right) \\ & - \frac{2\beta\,\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{4a^{\frac{\mu+1}{2}}\cdot c^{\frac{\nu+1}{2}}} F\left(\frac{\mu+1}{2}, \frac{\nu+1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2\beta\cdot 2\beta}{2\cdot 2}\right)\Bigg\}. \end{aligned} \right.$$

Aus dieser Gleichung (8) bezw. (8a), sowie aus (4) bezw. (4a) ersehen wir nun zunächst, daß die beiden zu untersuchenden Doppelintegrale in bezug auf β einfach hypergeometrische Funktionen sind, ein Resultat, das allerdings vorläufig noch wegen der nicht erledigten Restgliederuntersuchung als hypothetisch betrachtet werden muß. Es wird sich jedoch im folgenden zeigen, daß sich dieses Ergebnis auf einem zweiten völlig abweichenden Wege mit Hilfe einer von Riemann eingeführten besonderen Funktion abermals nachweisen läßt.

Des weiteren bemerken wir bei einem aufmerksamen Vergleich der Resultate (8) und (4), daß der Ausdruck in der geschweiften Klammer von (8) gerade die Funktion $E(\mu, \nu)$ in

der Form (4) darstellt, und sich somit die Funktion $H(\mu, \nu, \varrho)$ nur um den Faktor

$$\frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)}$$

von $E(\mu, \nu)$ unterscheidet.

Wir erhalten demnach schließlich zwischen den beiden vorliegendeu Doppelintegralen die Zusammenhangsformel:

(9) $$H(\mu, \nu, \varrho) = \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)} \asymp E(\mu, \nu),$$

die freilich aus dem oben genannten Grunde vorläufig ebenfalls als hypothetisch hinzustellen ist.

Wir werden jedoch diese Formel (9) durch eine einfache Transformation der Doppelintegrale $E(\mu, \nu)$ und $H(\mu, \nu, \varrho)$ sogleich abermals nachweisen können.

Zu diesem Zwecke gehen wir von der Funktion $E(\mu, \nu)$ in der Normalform aus:

$$E(\mu, \nu) = C \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-(x^2+y^2+2\beta xy)}\, dx\, dy,$$

worin

$$C = \frac{1}{a^{\frac{\mu}{2}} c^{\frac{\nu}{2}}}$$

und wegen der Bestimmung, daß $\varphi(x, y)$ eine positive definite Form II. Grades sein sollte, der Parameter $\beta < 1$ anzunehmen war.

Der Faktor C kann, da er für die folgenden Untersuchungen ohne Einfluß ist, wieder ausgelassen werden.

Setzen wir nunmehr:

(10) $$xy = s, \quad \frac{y}{x} = t, \quad \text{also} \quad x = \sqrt{\frac{s}{t}}, \quad y = \sqrt{s \cdot t},$$

so wird bekanntlich

$$dx\, dy = \Delta\, ds\, dt,$$

worin Δ die sogenannte Funktionaldeterminante

$$\Delta = \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \left(\frac{1}{4t} + \frac{1}{4t}\right) ds\, dt = \frac{1}{2t}\, ds\, dt$$

bezeichnet.

Da die Integrationsgrenzen bei dieser Transformation (10) des vorgelegten Doppelintegrales $E(\mu, \nu)$ die nämlichen bleiben, können wir nunmehr schreiben:

$$(11) \qquad 2E(\mu,\nu) = \int_0^\infty \int_0^\infty s^{\frac{\mu+\nu}{2}-1} t^{\frac{\nu-\mu}{2}-1} e^{-\left(t+\frac{1}{t}+2\beta\right)s}\, ds\, dt.$$

Durch Umkehrung der Integrationsgrenzen erhalten wir hierfür:

$$(11\,a) \qquad 2E(\mu,\nu) = \int_0^\infty t^{\frac{\nu-\mu}{2}-1} dt \int_0^\infty s^{\frac{\mu+\nu}{2}-1} e^{-\left(t+\frac{1}{t}+2\beta\right)s}\, ds.$$

Das rechtsstehende zweite Integral tritt dabei in einer Form auf, die schon bei der bereits mehrfach genannten Gammafunktion eingangs angeführt war.

Es ist bekanntlich:

$$\Gamma(a) = \frac{1}{k^a} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-kx}\, dx.$$

für alle Werte $k > 0$ (auch für komplexes k mit positivem reellen Bestandteil).

Demnach folgt:

$$\int_0^\infty s^{\frac{\mu+\nu}{2}-1} e^{-\left(t+\frac{1}{t}+2\beta\right)s}\, ds = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{t}+2\beta\right)^{\frac{\mu+\nu}{2}}},$$

sodaß wir für das Doppelintegral $E(\mu, \nu)$ schließlich die Darstellung:

$$(12) \qquad 2E(\mu,\nu) = \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) \int_0^\infty \frac{t^{\frac{\nu-\mu}{2}-1}}{\left(t+\frac{1}{t}+2\beta\right)^{\frac{\mu+\nu}{2}}}\, dt$$

oder

$$(12\,a) \qquad 2E(\mu,\nu) = \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) \int_0^\infty \frac{t^{\nu-1}}{T^{\frac{\mu+\nu}{2}}}\, dt$$

erhalten, falls wir $T = 1 + t^2 + 2\beta t$ setzen.

Nunmehr wollen wir, ausgehend von der „Normalform“ des zweiten Doppelintegrals:

$$H(\mu,\nu,\varrho) = C \int_0^{\sqrt{a}} \int_0^{\sqrt{c}} x^{\mu-1} y^{\nu-1} [1 - q(x,y)]^{\varrho-1}\, dx\, dy.$$

das sich für alle Werte $x \geqq 0$ und $y \geqq 0$ und für $\varphi(x, y) \leqq 1$ über den im ersten Quadranten gelegenen Teil der Ellipse

$$x^2 + y^2 + 2\beta xy = 1$$

erstrekte, die gleiche Transformation

$$(13) \qquad x = \sqrt{\frac{s}{t}}, \quad y = \sqrt{s \cdot t}$$

wie für das Doppelintegral $E(\mu, \nu)$ vornehmen.

Wir erhalten dann ebenfalls:

$$dx\,dy = \Delta\, ds\,dt = \frac{1}{2t}\, ds\,dt$$

und demnach für das Doppelintegral $H(\mu, \nu, \varrho)$ die Form:

$$(14) \quad 2H(\mu, \nu, \varrho) = \int\int s^{\frac{\mu+\nu}{2}-1} t^{\frac{\nu-\mu}{2}-1} \left[1 - s\left(t + \frac{1}{t} + 2\beta\right)\right]^{\varrho-1} ds\,dt,$$

erstreckt für alle positiven Werte von (s, t), für die

$$s\left(t + \frac{1}{t} + 2\beta\right) \leqq 1$$

ist. Es ist demnach zu integrieren:

nach s: von $0 \ldots \frac{1}{T} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t} + 2\beta\right)}$

nach t: von $0 \ldots \infty$.

Demnach ist:

$$2H(\mu, \nu, \varrho) = \int_0^{\infty} dt \int_0^{\frac{1}{T}} s^{\frac{\mu+\nu}{2}-1} t^{\frac{\nu-\mu}{2}-1} (1 - sT)^{\varrho-1} ds.$$

Setzen wir nunmehr im inneren Integral nach s diese Veränderliche $s = \frac{x}{T}$, so läuft hierin x von $0 \ldots 1$ und es wird:

$$(15) \quad 2H(\mu, \nu, \varrho) = \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{\nu-\mu}{2}-1}\, dt}{T^{\frac{\mu+\nu}{2}}} \int_0^1 x^{\frac{\mu+\nu}{2}-1} (1-x)^{\varrho-1}\, dx.$$

Verwenden wir nun die eingangs genannte Form der bekannten B-Funktion:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1}\, dx = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

so folgt schließlich für das Doppelintegral $H(\mu, \nu, \varrho)$ nunmehr:

$$(16) \qquad 2\,H(\mu,\nu,\varrho) = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\cdot\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)}\cdot\int_0^\infty \frac{t^\nu - 1}{(1+t^2+2\beta t)^{\frac{\mu+\nu}{2}}}\,dt$$

oder:

$$(16\,a) \qquad 2\,H(\mu,\nu,\varrho) = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\cdot\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)}\cdot\int_0^\infty \frac{t^\nu - 1}{T^{\frac{\mu+\nu}{2}}}\,dt.$$

Durch Vergleich mit dem früheren Ausdruck (12a) erhalten wir demnach den bereits aus Formel (9) ersichtlichen Zusammenhang der beiden Doppelintegrale:

$$(9\,a) \qquad H(\mu,\nu,\varrho) = \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)}\cdot E(\mu,\nu),$$

den wir also durch den vorangegangenen Beweis auf einem zweiten neuen Wege gefunden haben, ohne dabei von der nicht ganz einwandfreien Entwicklung in eine Reihe nach steigenden Potenzen von β Gebrauch zu machen.

Nach dieser eingeschobenen Betrachtung über die Zusammenhangsformel der beiden Funktionen, können wir nunmehr auf die oben bereits hervorgehobene Eigenschaft zurückgreifen, daß, wie aus den Resultaten (4) und (8) hervorging, die beiden zu untersuchenden Funktionen in bezug auf β einfach hypergeometrische Funktionen sind.

Wir hatten bereits an jener Stelle bemerkt, daß diese Eigenschaft auf einem von dem für (4) und (8) maßgebenden völlig abweichenden Wege nochmals nachgewiesen werden könne, und zwar mit Hilfe einer von Bernhard Riemann eingeführten, für weitere Anknüpfungen äußerst fruchtbaren Funktion.

Da wir im folgenden von dieser eingehend werden Gebrauch machen müssen, so empfiehlt es sich wohl, vorerst ganz allgemein in großen Zügen die Eigenschaften dieser Funktion darzustellen, bevor wir sie besonders für unsere Untersuchungen verwenden.

Näheres hierüber findet sich in:

1. Bernhard Riemann: Gesammelte Werke, folg. 67—87, Leipzig 1892, unter dem Titel:

„Beiträge zur Theorie der durch die Gaußsche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Funktionen."

2. Riemann-Weber: Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, II. Auflage, II. Bd., pag. 40—55.

Im folgenden soll sich in der Hauptsache an die in dem zuletzt zitierten Werke gegebene Entwicklung gehalten werden.

Danach definieren wir die sogenannte Q-Funktion:

$$Q\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$$

mit den nachstehenden Eigenschaften:

I. „Die Funktion Q sei in der Umgebung eines jeden von a, b, c verschiedenen Punktes x_0 endlich und stetig."

Damit ist bekanntlich eine Entwickelbarkeit dieser Funktion nach ganzen positiven Potenzen von $(x—x_0)$ gegeben.

II. „Die drei Punkte a, b, c nennen wir den ersten, zweiten und dritten Verzweigungspunkt der Funktion Q, von denen auch der eine oder der andere ins Unendliche fallen darf."

Je nachdem wir dann von einem fixierten Punkt x_0 aus den Punkt x um diese drei Verzweigungspunkte führen, indem einmal der Weg alle drei oder keinen dieser drei Punkte, ein andermal nur einen oder zwei, aber nicht alle dieser Verzweigungspunkte umschließt, werden wir entweder zu demselben Anfangswert zurückkehren oder nicht. Im letzteren Falle erhalten wir einen sogenannten „Zweig der Q-Funktion", der wieder eine endliche und stetige Funktion der Variabeln x darstellen.

Für diese haben wir dann die Eigenschaften:

III. „Es gibt zwei Zweige Q, Q', die nicht in konstantem Verhältnis stehen, aber zwischen irgend drei Zweigen Q, Q', Q'' der Q-Funktion besteht eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten:

$$c\,Q + c'\,Q' + c''\,Q'' = 0,$$

woraus weiterhin folgt, daß durch irgend zwei nicht in konstantem Verhältnis stehende Zweige der Q-Funktion jeder andere Zweig linear und homogen mit konstantem Koeffizienten ausgedrückt werden kann.“

Über das Verhalten der Q-Funktion in der Umgebung von Verzweigungspunkten erfahren wir:

IV. „Die Funktion Q ist in jeder der drei Formen darstellbar:

$$\begin{aligned} &c_\alpha Q^\alpha + c_{\alpha'} Q^{\alpha'} \\ &c_\beta Q^\beta + c_{\beta'} Q^{\beta'} \\ &c_\gamma Q^\gamma + c_{\gamma'} Q^{\gamma'} \end{aligned}$$

mit konstanten Koeffizienten $c_\alpha, c_{\alpha'} \ldots c_\gamma, c_{\gamma'}$, so daß

$$(x-a)^{-\alpha} Q^\alpha \qquad (x-a)^{-\alpha'} Q^{\alpha'}$$

in der Umgebung von a endlich, stetig und für $x = a$ von Null verschieden, also nach positiven ganzen Exponenten von $(x-a)$ entwickelbar sind, und daß

$$\begin{aligned} &(x-b)^{-\beta} Q^\beta \qquad (x-b)^{-\beta'} Q^{\beta'} \\ &(x-c)^{-\gamma} Q^\gamma \qquad (x-c)^{-\gamma'} Q^{\gamma'} \end{aligned}$$

in der Umgebung der beiden anderen Verzweigungspunkte b und c dieselbe Eigenschaft haben.“

Die α, α', β, β', γ, γ' sind gegebene reelle oder imaginäre Größen, die das erste, zweite, dritte Exponentenpaar heißen.

Aus dieser Definition ergeben sich nunmehr weitere wichtige Folgerungen:

V. „Die Q-Funktion bleibt ungeändert, wenn die drei Vertikalreihen

$$\begin{matrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{matrix}$$

beliebig untereinander vertauscht werden, sowie auch α mit α', β mit β' und γ mit γ'.“

VI. „Wir können die Variable x in einer Q-Funktion einer linearen Transformation unterwerfen, wenn wir gleichzeitig die drei Punkte a, b, c derselben linearen Transformation unterwerfen.“

Wenn also A, B, C, D Konstanten bedeuten, deren Determinante $AD-BC$ verschieden ist, und

$$x = \frac{Ax' + B}{Cx' + D}$$

gesetzt wird und a', b', c' die Werte bedeuten, die x' für

$$x = a \qquad x = b \qquad x = c$$

annimmt, so ist:

$$Q\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{vmatrix} = Q\begin{vmatrix} a' & b' & c' & \\ \alpha & \beta & \gamma & x' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{vmatrix}.$$

Durch Anwendung dieses Satzes können wir nun durch lineare Transformation jede Q-Funktion aus einer speziellen ableiten, in der a, b, c die Werte 0, ∞, 1 haben.

Zur Vereinfachung führt daher Riemann die Bezeichnung

$$Q\begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{vmatrix} = Q\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{vmatrix}$$

ein.

Durch die linearen Transformationen:

$$x,\ 1-x,\ \frac{1}{x},\ \frac{x-1}{x},\ \frac{1}{1-x},\ \frac{x}{x-1}$$

werden bekanntlich die drei Werte 0, ∞, 1 auf alle möglichen Arten permutiert, und wir erhalten demnach den Satz:

VII. „Eine Q-Funktion mit den Verzweigungspunkten 0, ∞, 1 kann auf folgende sechs Arten dargestellt werden:

$$Q\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{pmatrix}, \qquad Q\begin{pmatrix} \gamma & \beta & \alpha & \\ \gamma' & \beta' & \alpha' & 1-x \end{pmatrix}, \quad Q\begin{pmatrix} \beta & \alpha & \gamma & \frac{1}{x} \\ \beta' & \alpha' & \gamma' & \end{pmatrix},$$

$$Q\begin{pmatrix} \gamma & \alpha & \beta & \frac{x-1}{x} \\ \gamma' & \alpha' & \beta' & \end{pmatrix}, \quad Q\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \alpha & \frac{1}{1-x} \\ \beta' & \gamma' & \alpha' & \end{pmatrix}, \quad Q\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta & \frac{x}{1-x} \\ \alpha' & \gamma' & \beta' & \end{pmatrix}.$$

Schließlich lassen sich die Exponenten der Q-Funktion umändern; wenn ε und δ beliebige Größen sind, so kann man setzen:

VIII. $$x^{\delta}(1-x)^{\varepsilon} Q\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} \alpha+\delta, & \beta-\delta-\varepsilon, & \gamma+\varepsilon & \\ \alpha'+\delta, & \beta'-\delta-\varepsilon, & \gamma'+\varepsilon & x \end{pmatrix}$$

und ebenso:

$$Q\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{vmatrix}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\delta} = Q\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \alpha+\delta & \beta-\delta & \gamma & x \\ \alpha'+\delta & \beta'-\delta & \gamma' & \end{vmatrix}.$$

„Dabei ist zu beachten, daß die Summe der Exponenten:

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma' = \mathrm{s}$$

bei dieser Umformung dieselbe geblieben ist.“

Von diesen letzten Eigenschaften werden wir im Nachstehenden besonders wertvollen Gebrauch machen können.

Des weiteren weist nun Riemann nach, daß diese Funktion

$$Q\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{pmatrix}$$

durch eine Differentialgleichung bestimmt werden kann.

Denn sind Q und Q' zwei Zweige mit nicht konstantem Verhältnis und setzen wir:

IX. $$\Delta(y) = \begin{vmatrix} \frac{d^2y}{dx^2}, & \frac{d^2Q}{dx^2}, & \frac{d^2Q'}{dx^2}, \\ \frac{dy}{dx}, & \frac{dQ}{dx}, & \frac{dQ'}{dx}, \\ y, & Q, & Q' \end{vmatrix},$$

so ist $\Delta(y) = 0$ eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, die die beiden partikulären Integrale Q und Q' hat und folglich das allgemeine Integral:

$$y = c\,Q + c'\,Q',$$

wenn c und c' die Integrationskonstanten sind.

Dafür können wir auch schreiben:

X. $$\Delta(y) = \Delta_0 \frac{d^2y}{dx^2} + \Delta_1 \frac{dy}{dx} + \Delta_2 y,$$

wenn:

XI.
$$\begin{cases} \Delta_0 = Q' \frac{dQ}{dx} - Q \frac{dQ'}{dx}, \\ \Delta_1 = Q \frac{d^2Q'}{dx^2} - Q' \frac{d^2Q}{dx}, \\ \Delta_2 = \frac{dQ'}{dx} \cdot \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{dQ}{dx} \cdot \frac{d^2Q'}{dx^2} \end{cases}$$

bezeichnen.

Endlich erhält Riemann diese Differentialgleichung in der Form:

XII. $$x^2(1-x^2) f_0 \frac{d^2y}{dx^2} + x(1-x) f_1 \frac{dy}{dx} + f_2 y = 0,$$

worin er

XIII.
$$\begin{aligned} f_0 &= x^{1-\alpha-\alpha'}(1-x)^{1-\gamma-\gamma'} \Delta_0, \\ f_1 &= x^{2-\alpha-\alpha'}(1-x)^{2-\gamma-\gamma'} \Delta_1, \\ f_2 &= x^{3-\alpha-\alpha'}(1-x)^{3-\gamma-\gamma'} \Delta_2 \end{aligned}$$

setzt. f_0, f_1, f_2 sind dann ganze rationale Funktionen von x, die für alle endlichen Werte von x endlich und stetig sind."

Schließlich ist noch zu bemerken, daß die Exponentensumme
$$s = \alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma'$$
eine ganze Zahl und nicht größer als 1 sein darf.

Als ausgezeichneten Fall dieser allgemeinen Q-Funktion bezeichnet nun Riemann denjenigen, bei dem die Exponentensumme ihren größten Wert 1 erreicht, und diese bezeichnet er mit

XIV.
$$P\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix}.$$

„Es wird dann f_0 konstant und kann gleich 1 gesetzt werden."

Natürlich gelten hier dieselben Eigenschaften, wie für die allgemeine Q-Funktion, und insbesondere erhalten wir nach VIII die Relation:

VIIIa.
$$P\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix} = x^{\alpha'}(1-x)^{\gamma'} P\begin{pmatrix} \alpha-\alpha', & \beta+\alpha'+\gamma', & \gamma-\gamma' & x \\ 0 & \beta'+\alpha'+\gamma', & 0 & \end{pmatrix}.$$

„Ausreichend ist es daher, wenn wir $\alpha' = \gamma' = 0$ setzen und

$$y = P\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & x \\ 0 & \beta' & 0 & \end{pmatrix}$$

allein betrachten unter der Bedingung, daß

$$\alpha+\beta+\gamma+\beta'=1$$

ist.“ „Diese Funktion $y(x)$ genügt dann der Differentialgleichung:

XV. $$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[(1-\alpha)-(\beta+\beta'+1)x]\frac{dy}{dx}-\beta\cdot\beta' y=0,$$

die mit der bekannten hypergeometrischen Differentialgleichung übereinstimmt, so daß wir als partikuläre Lösung

XVI. $$y=P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & x\\ 0 & \beta' & 0 & \end{pmatrix}=F(\beta,\beta',1-\alpha,x)$$

erhalten.“

Von dieser Verwandtschaft zwischen der P-Funktion und der Gaußschen hypergeometrischen Funktion werden wir später ebenfalls Gebrauch machen können.

Von besonderem Nutzen für die nachstehenden Untersuchungen ist nun noch eine spezielle Umformung der P-Funktion, die daher noch kurz angeführt werden soll:

„Nehmen wir nämlich an, daß in einer P-Funktion eine der Exponentendifferenzen, etwa $\alpha-\alpha'$, den Wert $\frac{1}{2}$ habe, dann können wir dafür noch schreiben:

$$P\begin{pmatrix}0 & \beta & \gamma & x\\ 1/2 & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix}.$$

Setzen wir dann $\xi=\sqrt{x}$, so ist der Punkt $\xi=0$ in der ξ-Ebene kein Verzweigungspunkt mehr, sondern ein Punkt, in dem die Funktion eindeutig und stetig ist, während nunmehr $\xi=\pm 1$ zwei Verzweigungspunkte sind.

Wir können daher schreiben:

XVII. $$P\begin{pmatrix}0 & \beta & \gamma & x\\ 1/2 & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix}=P\begin{Bmatrix}-1 & \infty & +1 & \\ \gamma & 2\beta & \gamma & \sqrt{x}\\ \gamma' & 2\beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}.$$

„Aus dieser Transformation ersieht man, daß sie gleichfalls dann zu verwenden ist, wenn zwei der Exponentendifferenzen gleich sind.“

Riemann zeigt dann in der zitierten Abhandlung in seinen gesammelten Werken, die übrigens zunächst im VII. Bande der Abhandlungen der königlichen Wissenschaften zu Göttingen erschienen ist, wie die P-Funktion zur Darstellung von bestimmten Integralen verwendet werden kann.

Naturgemäß bedarf es, wenn die Funktion unter dem Integralzeichen für einen der Werte 0, 1, $\frac{1}{x}$, ∞, so unendlich groß wird, daß sie die Integration bis an denselben nicht zuläßt, einer gewissen Modifikation des Integrationsweges.

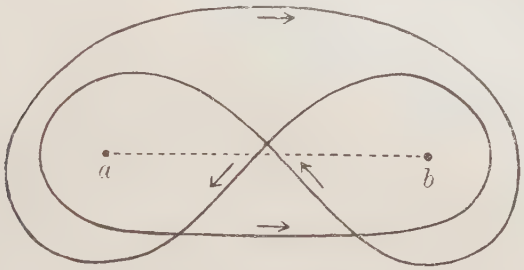

Fig. 4.

„Nach Pochhammer (Mathem. Annalen, Bd. 35) erhält man jedoch einen Integrationsweg, der in allen Fällen statthaft ist, durch einen Doppelumlauf um zwei Verzweigungspunkte, wie ihn die vorstehende Figur 4 zeigt.

Ist die Integration von a bis b gestattet, so kann dieser Integrationsweg so zusammengezogen werden, daß er aus vier zwischen a und b verlaufenden Linien besteht. Bezeichnet man dann mit P das Integral über eine dieser Linien, so ist das über den Doppelumlauf erstreckte Integral:

$$(1-e^{2\alpha\pi i})(1-e^{-2\beta\pi i})$$

Nach diesen eingeschobenen Betrachtungen über die allgemeine Funktion Q und deren Spezialfall P können wir nunmehr zu der Untersuchung der beiden vorgelegten Doppelintegrale $E(\mu,\nu)$ und $H(\mu,\nu,\varrho)$ zurückkehren.

Zwar sind diese Betrachtungen ausführlicher geworden, als ursprünglich geplant war, aber um so zweckdienlicher für die nachstehenden Entwicklungen, die sich nun folgendermaßen darstellen lassen:

Durch die einfachen Transformationen:

$$x\,y = s, \qquad \frac{y}{x} = t$$

hatten wir die beiden Doppelintegrale in der Form:

$$2\,E(\mu,\nu) = \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\int_0^\infty \frac{t^{\nu-1}}{T^{\frac{\mu+\nu}{2}}}\,dt \tag{12a}$$

und

$$2\,H(\mu,\nu,\varrho) = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\cdot\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)}\int_0^\infty \frac{t^{\nu-1}}{T^{\frac{\mu+\nu}{2}}}\,dt \tag{16a}$$

erhalten, worin $T = 1 + t^2 + 2\beta t$ gesetzt war.

Das in beiden Relationen gemeinsam erscheinende Integral:

$$\int_0^\infty \frac{t^{\nu-1}}{(1+2\beta t+t^2)^{\frac{\mu+\nu}{2}}}\,dt$$

können wir nun aber durch weitere Transformation vereinfachen:

Zu diesem Zwecke setzen wir in dem Ausdruck $(1+2\beta t+t^2)$ den Koeffizienten $\beta = \cos\vartheta$, so ist:

$$1 + 2\beta t + t^2 = 1 + 2\cos\vartheta\, t + t^2 \tag{17}$$

und da bekanntlich

$$\cos\vartheta = \frac{e^{+i\vartheta}+e^{-i\vartheta}}{2}$$

ist, so folgt:

$$1 + 2\beta t + t^2 = (t + e^{i\vartheta})\,(t + e^{-i\vartheta})$$

und daher auch:

$$\int_0^\infty \frac{t^{\nu-1}}{(1+2\beta t+t^2)^{\frac{\mu+\nu}{2}}}\,dt = \int_0^\infty t^{\nu-1}(t+e^{i\vartheta})^{-\frac{\mu+\nu}{2}}(t+e^{-i\vartheta})^{-\frac{\mu+\nu}{2}}\,dt. \tag{18}$$

Nunmehr können wir von der durch Riemann eingeführten Funktion:

$$P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$$

Gebrauch machen und schreiben:

$$(19)\quad \frac{2E(\mu,\nu)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)} = x^{\frac{\mu}{2}}(x-1)^{1-\mu-\nu}\, P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & 1-\nu & 0 & x \\ \frac{\nu-\mu}{2} & 1-\frac{\mu+\nu}{2} & \mu+\nu-1 & \end{Bmatrix}.$$

Durch Einführung der linearen Transformation $z = \frac{x+1}{x-1}$ und entsprechender Modifikation der Exponentenpaare erhalten wir nach der allgemeinen Eigenschaft (VIII) der Q-Funktion, sowie wegen der Vertauschbarkeit der Exponentenpaare:

$$(20)\quad \frac{2E(\mu,\nu)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)} = x^{\frac{\mu}{2}}(x-1)^{1-\mu-\nu}\, P\begin{Bmatrix} -1 & \infty & +1 & \\ 0 & 0 & 1-\nu & \frac{x+1}{x-1} \\ \frac{\nu-\mu}{2} & \mu+\nu-1 & 1-\frac{\mu+\nu}{2} & \end{Bmatrix}$$

oder auch

$$(20\,a)\quad \frac{2E(\mu,\nu)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)} = x^{\frac{\mu}{2}}(x-1)^{1-\mu-\nu}(x-1)^{1-\nu}\, P\begin{Bmatrix} -1 & \infty & +1 & \\ 0 & 1-\nu & 0 & z \\ \frac{\nu-\mu}{2} & \mu & \frac{\nu-\mu}{2} & \end{Bmatrix}.$$

Setzen wir in $z = \frac{x+1}{x-1}$ die Variable $x = e^{2i\vartheta}$, so folgt:

$$z = \frac{x+1}{x-1} = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}.$$

Da ferner in der P-Funktion in der unteren Horizontalreihe die beiden Exponentendifferenzen

$$\alpha' = \frac{\nu-\mu}{2} \qquad \text{und} \qquad \gamma' = \frac{\nu-\mu}{2}$$

gleich sind, können wir die Transformation XVII der P-Funktion ansetzen:

$$(21)\quad \frac{2E(\mu,\nu)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)} = (\beta^2-1)^{-\frac{\mu}{2}}\, P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & +1 & \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & z^2 \\ \frac{1}{2} & \frac{\mu}{2} & \frac{\nu-\mu}{2} & \end{Bmatrix}.$$

Oder nach Vertauschung der entsprechenden Exponentenpaare

$$\frac{2E(\mu,\nu)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)} = (\beta^2-1)^{-\frac{\mu}{2}} P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\nu-\mu}{2} & \frac{\mu}{2} \end{Bmatrix} \beta^2 .$$

Hierin die Transformation VIII angewendet, folgt schließlich:

$$\frac{2E(\mu,\nu)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)} = P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \frac{\mu}{2} & \frac{1-\mu-\nu}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\nu}{2} & 0 \end{Bmatrix} \beta^2 . \tag{22}$$

Aus der Definition der P-Funktion, daß nämlich durch irgend zwei nicht in konstantem Verhältnis stehende Zweige P und P' einer P-Funktion jeder andere Zweig linear und homogen mit konstanten Koeffizienten ausgedrückt werden kann und aus der ebenfalls bereits erwähnten Darstellbarkeit der P-Funktion ergibt sich schließlich:

$$\frac{2E(\mu,\nu)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)} = C_1 F\left(\frac{\mu}{2},\ \frac{\nu}{2},\ \frac{1}{2},\ \beta^2\right) + C_2 \beta F\left(\frac{\mu+1}{2},\ \frac{\nu+1}{2},\ \frac{3}{2},\ \beta^2\right) \tag{23}$$

und eine ganz ähnliche Entwicklung für das zweite Doppelintegral $H(\mu,\nu,\varrho)$, das sich ja nach der Formel (16a) von $E(\mu,\nu)$ nur um den Faktor

$$\frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)}$$

unterscheidet.

Die hierin auftretenden Konstanten C_1 und C_2 bestimmen sich einfach auf die Weise, daß man für $\beta = 0$ beide Seiten und ihre Ableitungen nach β vergleicht.

Wir gelangen schließlich zu denselben Darstellungen der beiden Funktionen $E(\mu,\nu)$ und $H(\mu,\nu,\varrho)$, wie sie schon durch (4) und (8) gegeben waren, und haben somit auf eine zweite, von der dortigen völlig abweichenden Art die Eigenschaft nachgewiesen, daß beide vorgelegten Doppelintegrale in bezug auf β einfach hypergeometrische Funktionen sind.

§ 3.
Funktionalbeziehungen für die Funktionen $E(\mu, \nu)$ und $H(\mu, \nu, \varrho)$.

Bekanntlich besteht, wie wir bereits einleitend kurz berichtet haben, für die mit den vorgelegten Doppelintegralen so große Analogie besitzende Gammafunktion, nämlich für

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx \qquad p > 1$$

die einfache Funktionalgleichung

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p),$$

aus der mancherlei wichtige Folgerungen, besonders für den analytischen Charakter dieser Funktion gezogen werden können.

Die Herleitung dieser Relation geschieht auf äußerst einfachen Wegen der verschiedensten Art; sei es aus der Gaußschen Darstellung des Grenzüberganges:

$$\Gamma(x) = \lim_{m=\infty} \frac{m!\; m^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)}.$$

indem man darin statt x den Wert $x+1$ einsetzt und durch einfache Umrechnung obiges Resultat erhält. Oder sei es z. B., daß man in der obigen Eulerschen Integraldarstellung einfach partiell nach x integriert und damit ebenfalls zu der erwähnten Funktionalgleichung gelangt.

Es liegt nun die Vermutung nahe, ob es nicht gelingen könnte, auf einem ähnlichen Wege für die vorgelegte Funktion $E(\mu, \nu)$ ebenfalls Rekursionsformeln aufzustellen.

Wir werden nun im folgenden sehen, daß dies in der Tat möglich ist.

Gehen wir wieder von der Integraldarstellung der vorgelegten Funktion:

$$E(\mu, \nu) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-\varphi(x,y)} dx\, dy \qquad \begin{matrix} \mu > 1 \\ \nu > 1 \end{matrix}$$

aus, was wir wegen der konstanten Grenzen auch schreiben können:

$$E(\mu,\nu)=\int_0^\infty y^{\nu-1}\,dy\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-\varphi(x,y)}\,dx.$$

Wir wenden nunmehr auf das zweite rechtsstehende Integral die bekannte partielle Integration nach der Formel:

$$\int_0^\infty u\,dv=\Big[u\cdot v\Big]_0^\infty-\int_0^\infty v\,du.$$

Setzen wir zu diesem Zweck:

$$u=e^{-\varphi(x,y)}\quad\text{und}\quad dv=x^{\mu-1},$$

dann ist:

$$du=-\varphi'_x\,e^{-\varphi(x,y)}\,dx\quad\text{und}\quad v=\int x^{\mu-1}\,dx=\frac{1}{\mu}\,x^\mu.$$

Nach der erwähnten Formel der partiellen Integration werden wir demnach erhalten:

$$\textbf{(1)}\quad E(\mu,\nu)=\int_0^\infty y^{\nu-1}\,dy\left\{\Big[e^{-\varphi(x,y)}\cdot\frac{1}{\mu}\,x^\mu\Big]_0^\infty+\frac{1}{\mu}\int_0^\infty x^\mu\,\varphi'_x e^{-\varphi(x,y)}\,dx\right\}.$$

Nun wird aber das erste Glied in der geschweiften Klammer, nämlich

$$\Big[e^{-\varphi(x,y)}\,\frac{1}{\mu}\,x^\mu\Big]$$

zwischen den Grenzen 0 und ∞ verschwinden, wie wir folgendermaßen beweisen können.

Daß der Quotient:

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{x^\mu}{e^{\varphi(x,y)}}=\frac{1}{\mu}\,\frac{x^\mu}{e^{ax^2}\cdot e^{2bxy}\cdot e^{cy^2}}$$

für den Wert $x=0$ verschwindet, ergibt sich ohne weiteres.

Für den zweiten Wert $x=\infty$ würde jedoch dieser Quotient den unbestimmten Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$ erhalten.

Nun gilt aber bekanntlich für den Grenzwert von Brüchen an einer Stelle, wo Zähler und Nenner gleichzeitig unendlich werden, folgender Satz:

„Wenn die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ für $x=x_0$ den Wert ∞ annehmen, wenn sie ferner nebst ihren n-Ableitungen für jeden Wert von x in der Umgebung von x_0, abgesehen von x_0 selbst, bestimmte endliche Werte haben, und wenn

außerdem in dieser Umgebung $F^n(x)$ nirgends gleich Null ist, so wird:

$$\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x=x_0} \frac{f^n(x)}{F^n(x)}.$$

Macht man hier von diesem Satze Gebrauch, und differentiiert man den Ausdruck

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{\mu} \frac{x^\mu}{e^{\varphi(x,y)}}$$

μ mal, so geht daraus hervor, daß in der Tat dieser Quotient auch für den zweiten Wert $x = \infty$ verschwindet.

Wir erhalten demnach die Gleichung (1), wie folgt:

$$E(\mu,\nu) = \int_0^\infty y^{\nu-1}\, dy \left\{ \frac{1}{\mu} \int_0^\infty x^\mu e^{-\varphi(x,y)} (2ax + 2by)\, dx \right\} \begin{matrix} \mu > 1 \\ \nu > 1 \end{matrix},$$

was wir auch schreiben können:

$$E(\mu,\nu) = \frac{2a}{\mu} \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu+1} y^{\nu-1} e^{-\varphi(x,y)}\, dx\, dy + \frac{2b}{\mu} \int_0^\infty \int_0^\infty x^\mu y^\nu e^{-\varphi(x,y)}\, dx\, dy$$

oder auch:

(2) $$\mu E(\mu,\nu) = 2a E(\mu+2,\nu) + 2b E(\mu+1,\nu+1).$$

Wären wir von der bereits eingangs abgeleiteten Normalform, nämlich

$$E(\mu,\nu) = C \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-\varphi(x,y)}\, dx\, dy,$$

wo

$$\varphi(x,y) = x^2 + 2\beta xy + y^2 \quad \text{und} \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{ac}} \quad \text{und} \quad C = \frac{1}{a^{\frac{\mu}{2}} c^{\frac{\nu}{2}}}$$

war, ausgegangen, so folgte unter der Annahme $C = 1$

(2a) $$\mu E(\mu,\nu) = 2 E(\mu+2,\nu) + 2\beta E(\mu+1,\nu+1).$$

Ein ganz analoges Resultat erhalten wir, wenn wir in der Gleichung:

$$E(\mu,\nu) = \int_0^\infty x^{\mu-1} dx \int_0^\infty y^{\nu-1} e^{-\varphi(x,y)}\, dy \qquad \begin{matrix} \mu > 1 \\ \nu > 1 \end{matrix}$$

das zweite Integral rechts partiell nach y integrieren.

Es ist dann:

$$(3)\quad E(\mu,\nu)=\int_0^\infty x^{\mu-1}\,dx\left\{\left[e^{-\varphi(x,y)}\frac{1}{\nu}y^\nu\right]+\frac{1}{\nu}\int_0^\infty y^\nu c^{-\varphi(x,y)}\varphi'_y\,dy\right\}.$$

Hierin ist ebenfalls der Ausdruck:

$$\left[\frac{1}{\nu}\,y^\nu\,e^{-\varphi(x,y)}\right]_0^\infty=0$$

aus denselben, bereits oben angeführten Erwägungen.

Daher ist also:

$$E(\mu,\nu)=\frac{1}{\nu}\int_0^\infty x^{\mu-1}\,dx\left\{\int_0^\infty y^\nu\,e^{-\varphi(x,y)}(2bx+2cy)\,dy\right\}\quad\begin{matrix}\mu>1\\ \nu>1\end{matrix}$$

oder:

$$E(\mu,\nu)=\frac{2b}{\nu}\int_0^\infty\int_0^\infty x^\mu\,y^\nu\,e^{-\varphi(x,y)}\,dx\,dy+\frac{2c}{\nu}\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\mu}\,y^{\nu+1}\,e^{-\varphi(x,y)}\,dx\,dy,$$

woraus folgt:

$$(4)\qquad \nu E(\mu,\nu)=2c\,E(\mu,\nu+2)+2b\,E(\mu+1,\nu+1).$$

Nehmen wir wieder die oben erwähnte Normalform des Doppelintegrals zum Ausgangspunkt dieser Rechnungen, so erhielten wir die Relation:

$$(4a)\qquad \nu E(\mu,\nu)=2E(\mu,\nu+2)+2\beta\,E(\mu+1,\nu+1).$$

Kombinieren wir die Resultate (2) und (4), so ergibt sich sofort:

$$(5)\qquad (\mu-\nu)E(\mu,\nu)=2a\,E(\mu+2,\nu)-2c\,E(\mu,\nu+2),$$

bezw. aus (2a) und (4a) folgt:

$$\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)\cdot E(\mu,\nu)=E(\mu+2,\nu)-E(\mu,\nu+2).$$

Gehen wir wiederum von der bereits des öfteren genannten Normalform:

$$E(\mu,\nu)=C\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\mu-1}y^{\nu-1}e^{-(x^2+2\beta xy+y^2)}\,dx\,dy$$

aus und nehmen $C=1$ an, so erhalten wir wegen der Symmetrie des Differentials in den Variabeln x und y die Beziehung:

$$(6)\qquad E(\mu,\nu)=E(\nu,\mu),$$

d. h. die Funktion $E(\mu, \nu)$ ist hinsichtlich ihrer Argumente μ und ν symmetrisch.

Weitere Resultate erhalten wir nun noch durch passende Kombination der bisherigen Gleichungen (2), (4) und (5).

Dividieren wir nämlich Gleichung (2) auf beiden Seiten mit μ und (5) mit $(\mu-\nu)$ und setzen beide rechten Seiten einander gleich, so folgt:

$$aE(\mu+2, \nu) - cE(\mu, \nu+2) = a\left(\frac{\mu-\nu}{\mu}\right)E(\mu+2, \nu) + 2b\left(\frac{\mu-\nu}{\mu}\right)E(\mu+1, \nu+1)$$

oder:

$$(7)\quad b(\mu-\nu)E(\mu+1, \nu+1) = a\nu E(\mu+2, \nu) - c\mu E(\mu, \nu+2)$$

oder setzen wir hierin $\mu = \mu-1$ und $\nu = \nu-1$, so folgt:

$$(8)\quad \begin{aligned} b(\mu-\nu)E(\mu, \nu) &= a(\nu-1)E(\mu+1, \nu-1) \\ &\quad - c(\mu-1)E(\mu-1, \nu+1). \end{aligned}$$

Das nämliche Resultat würden wir auch durch die Kombination der Gleichung (4) mit (5) erhalten.

Hätten wir dieselben Operationen mit (2a) und (5a) vorgenommen, so würde folgen:

$$(8a)\quad \begin{aligned} \beta(\mu-\nu)E(\mu, \nu) &= (\nu-1)E(\mu+1, \nu-1) \\ &\quad - (\mu-1)E(\mu-1, \nu+1). \end{aligned}$$

Ähnlich lassen sich nun für die zweite Funktion:

$$H(\mu, \nu, \varrho) = \int_0^1\int_0^1 x^{\mu-1}y^{\nu-1}[1-(ax^2+2bxy+cy^2)]^{\varrho-1}\,dx\,dy$$

oder in der bereits erwähnten Normalform, nämlich:

$$H(\mu, \nu, \varrho) = C\int_0^\alpha\int_0^\gamma x^{\mu-1}y^{\nu-1}[1-(x^2+2\beta xy+y^2)]^{\varrho-1}\,dx\,dy \qquad \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{a} \\ \gamma &= \sqrt{c} \\ C &= \frac{1}{a^{\frac{\mu}{2}}c^{\frac{\nu}{2}}} \end{aligned}$$

ebenfalls gewisse Funktionalbeziehungen herleiten.

Zunächst ersehen wir sofort aus dieser Normaldarstellung, daß das Differential in dieser Form in x und y symetrisch ist. Und daher ist auch:

I. $$H(\mu, \nu, \varrho) = H(\nu, \mu, \varrho),$$

d. h. die Funktion $H(\mu, \nu, \varrho)$ ist hinsichtlich der beiden Argumente μ und ν (nicht aber ϱ) symmetrisch, ein Ergebnis, das wir später aus einigen Spezialfällen werden ebenfalls leicht erkennen können.

Ein weiteres Resultat erhalten wir, wenn wir von folgender augenscheinlichen Identität ausgehen:

$$[1-\varphi(x,y)]^{\varrho-1} = [1-\varphi(x,y)]^{\varrho-1}\big[[1-\varphi(x,y)]+\varphi(xy)\big].$$

Setzen wir dies in der vorgelegten Funktion $H(\mu, \nu, \varrho)$ für den Faktor $[1-\varphi(x,y)]^{\varrho-1}$ ein, so folgt:

$$H(\mu,\nu,\varrho) = \int_0^1\int_0^1 x^{\mu-1}y^{\nu-1}[1-\varphi(x,y)]^{\varrho-1}\{[1-\varphi(x,y)]+\varphi(x,y)\}\,dx\,dy$$

oder:

$$\begin{aligned} H(\mu,\nu,\varrho) = &\int_0^1\int_0^1 x^{\mu-1}y^{\nu-1}[1-\varphi(x,y)]^{\varrho}\,dx\,dy \\ &+a\int_0^1\int_0^1 x^{\mu+1}y^{\nu-1}[1-\varphi(x,y)]^{\varrho-1}\,dx\,dy \\ &+2b\int_0^1\int_0^1 x^{\mu}y^{\nu}[1-\varphi(x,y)]^{\varrho-1}\,dx\,dy \\ &+c\int_0^1\int_0^1 x^{\mu-1}y^{\nu+1}[1-\varphi(x,y)]^{\varrho-1}\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Dafür können wir auch schreiben:

(II) $$\begin{cases} H(\mu,\nu,\varrho) = H(\mu,\nu,\varrho+1)+aH(\mu+2,\nu,\varrho) \\ \qquad\qquad +2bH(\mu+1,\nu+1,\varrho)+cH(\mu,\nu+2,\varrho) \end{cases}$$

oder, wenn wir dieselben Betrachtungen an der „Normalform“ für $H(\mu, \nu, \varrho)$ vorgenommen hätten, folgte:

$$\text{(IIa)} \quad \begin{cases} H(\mu,\nu,\varrho) = H(\mu,\nu,\varrho+1) + H(\mu+2,\nu,\varrho) \\ \qquad\qquad + 2\beta H(\mu+1,\nu+1,\varrho) + H(\mu,\nu+2,\varrho). \end{cases}$$

Diese soeben gefundene Relation ist mit der Relation (4) und mit der im vorhergegangenen § 2 für den Zusammenhang der beiden Funktionen $E(\mu,\nu)$ und $H(\mu,\nu,\varrho)$ erhaltenen, wegen der nicht vollendeten Restgliedуntersuchung noch hypothetisch bezeichneten, im folgenden jedoch auf eine zweite Art abermals nachgewiesenen Formel:

$$H(\mu,\nu,\varrho) = \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)} \cdot E\mu,\nu)$$

in Übereinstimmung, was man als eine weitere gewisse Probe der Richtigkeit dieser Formel ansehen kann.

Denn offenbar ist unter Verwendung dieser Gleichung:

$$\text{(a)} \quad \begin{aligned} H(\mu,\nu,\varrho+1) &= \frac{\Gamma(\varrho+1)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho+1\right)} \cdot E(\mu,\nu) \\ &= \frac{\varrho\cdot\Gamma(\varrho)}{\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)} \cdot E(\mu,\nu) \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{aligned} H(\mu+2,\nu,\varrho) &= \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+1+\varrho\right)} \cdot E(\mu+2,\nu) \\ &= \frac{\Gamma(\varrho)}{\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)} \cdot E(\mu+2,\nu) \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{aligned} H(\mu+1,\nu+1,\varrho) &= \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+1+\varrho\right)} \cdot E(\mu+1,\nu+1) \\ &= \frac{\Gamma(\varrho)}{\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)} \cdot E(\mu+1,\nu+1) \end{aligned}$$

und endlich:

$$\text{(d)} \quad \begin{aligned} H(\mu,\nu+2,\varrho) &= \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+1+\varrho\right)} \cdot E(\mu,\nu+2) \\ &= \frac{\Gamma(\varrho)}{\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)} \cdot E(\mu,\nu+2). \end{aligned}$$

Setzen wir diese 4 Resultate (a) ... (d) in die Gleichung (1) für die einzelnen Glieder ein, so folgt:

$$\left(\frac{\mu-\nu}{2}+\varrho\right)\cdot E(\mu,\nu)=\varrho\,E(\mu,\nu)+a\,E(\mu+2,\nu)+2b\,E(\mu+1,\nu+1)+c\,E(\mu,\nu+2)$$

oder:

$$\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)E(\mu,\nu)=a\,E(\mu+2,\nu)+2b\,E(\mu+1,\nu+1)+c\,E(\mu,\nu+2), \tag{9}$$

bezw. falls wir von der „Normalform“ für $H(\mu,\nu,\varrho)$ ausgegangen wären:

$$\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\cdot E(\mu,\nu)=E(\mu+2,\nu)+2\beta E(\mu+1,\nu+1)+E(\mu,\nu+2). \tag{9a}$$

Damit wäre zunächst eine weitere neue Reduktionsformel für die Funktion $E(\mu,\nu)$ erhalten.

Schreiben wir jedoch für die Relation (9) wie folgt:

$$(\mu+\nu)E(\mu,\nu)=2aE(\mu,\nu)+4bE(\mu+1,\nu+1)+2cE(\mu,\nu+2)$$

und subtrahieren:

$$(\mu-\nu)E(\mu,\nu)=2aE(\mu,\nu)\qquad\qquad-2cE(\mu,\nu+2), \tag{5}$$

so folgt:

$$\nu E(\mu,\nu)=2cE(\mu,\nu+2)+2bE(\mu+1,\nu+1),$$

was aber wieder die bereits durch partielle Integration gefundene Gleichung (4) darstellt.

Weiterhin können wir nun das bereits für die Funktion $E(\mu,\nu)$ mit Erfolg verwendete Verfahren der partiellen Integration auch für das zweite Doppelintegral $H(\mu,\nu,\varrho)$ benutzen, um damit andere Rekursionsformeln für diese Funktion zu erhalten.

Wir gehen also aus von der Integraldarstellung:

$$H(\mu,\nu,\varrho)=\int_0^1\int_0^1 x^{\mu-1}y^{\nu-1}[1-\varphi(x,y)]^{\varrho-1}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1 y^{\nu-1}\,dy\left\{\int_0^1 x^{\mu-1}[1-\varphi(xy)]^{\varrho-1}\,dx\right\}$$

und integrieren zunächst den inneren Ausdruck partiell nach x, indem wir setzen:

$$u = [1-\varphi(x,y)]^{\varrho-1} \qquad dv = x^{\mu-1}dx$$

$$du = [\varrho-1][1-\varphi(x,y)]^{\varrho-2}\varphi'_x(x,y) \qquad v = \frac{1}{\mu}x^{\mu}.$$

Dann ist:

$$H(\mu,\nu,\varrho) = \int_0^1 y^{\nu-1}dy\left\{\left[\frac{1}{\mu}x^{\mu}[1-\varphi(x,y)]^{\varrho-1}\right]_0^1 + \frac{\varrho-1}{\mu}\int_0^1 x^{\mu}[1-\varphi(x,y)]^{\varrho-2}(2ax+2by)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\mu}\int_0^1 y^{\nu-1}(1-a-2by-cy^2)^{\varrho-1}dy + \frac{2a(\varrho-1)}{\mu}\int_0^1\int_0^1 x^{\mu+1}y^{\nu-1}(1-\varphi(x,y)^{\varrho-2}dx\,dy + \frac{2b(\varrho-1)}{\mu}\int_0^1\int_0^1 x^{\mu}y^{\nu}[1-\varphi(x,y)]^{\varrho-2}dx\,dy$$

d. h.

$$\mu H(\mu,\nu,\varrho) = \int_0^1 y^{\nu-1}(1-a-2by-cy^2)^{\varrho-1}dy + 2a(\varrho-1)\cdot H(\mu+2,\nu,\varrho-1) + 2b(\varrho-1)H(\mu+1,\nu+1,\varrho-1)$$

und wenn wir das hierin auftretende einfache Integral abkürzend als Funktion der Parameter ν und ϱ

$$\int_0^1 y^{\nu-1}(1-a-2by-cy^2)dy = \psi(\nu,\varrho)$$

bezeichnen, so folgt für die Funktion $H(\mu,\nu,\varrho)$ die weitere neue Beziehungsgleichung:

$$\text{(III)}\quad \mu H(\mu,\nu,\varrho) = \psi(\nu,\varrho) + 2a(\varrho-1)H(\mu+2,\nu,\varrho-1) + 2bH(\mu+1,\nu+1,\varrho-1)$$

Eine entsprechende Gleichung erhalten wir, wenn wir schreiben:

$$H(\mu,\nu,\varrho)=\int_0^1 x^{\mu-1}dx\left\{\int_0^1 y^{\nu-1}e^{-\varphi(x,y)}dy\right\}\quad\begin{matrix}\mu>1\\ \nu>1\\ \varrho>1\end{matrix}$$

und nun partiell nach y integrieren.

Es wird dann:

$$H(\mu,\nu,\varrho)=\int_0^1 x^{\mu-1}dx\left\{\left[\frac{1}{\nu}y^{\nu}[1-\varphi(x,y)]^{\varrho-1}\right]_{y=0}^{y=1}\right.$$
$$\left.+\frac{\varrho-1}{\nu}\int_0^1 y^{\nu-1}[1-\varphi(x,y)]^{\varrho-2}[2bx+2cy]\,dy\right\}$$

oder

$$\nu H(\mu,\nu,\varrho)=\int_0^1 x^{\mu\ \ 1}(1-ax^2-2bx-c)^{\varrho-1}dx$$
$$+2b(\varrho-1)\int_0^1\int_0^1 x^{\mu}y^{\nu}[1-\varphi(x,y)]^{\varrho-2}dx\,dy$$
$$+2c(\varrho-1)\int_0^1\int_0^1 x^{\mu-1}y^{\nu+1}[1-\varphi(x,y)]^{\varrho-2}dx\,dy$$

und dafür können wir schreiben:

$$\nu\cdot H(\mu,\nu,\varrho)=\int_0^1 x^{\mu-1}(1-ax^2-2bx-c)^{\varrho-1}dx$$
$$+2c(\varrho-1)H(\mu,\nu+2,\varrho-1)+2b(\varrho-1)H(\mu+1,\nu+1,\varrho-1)$$

Bezeichnen wir abkürzend wieder:

$$\psi(\mu,\varrho)=\int_0^1 x^{\mu-1}(1-ax^2-2bx-c)^{\varrho-1}dx$$

so wird:

$$\text{(IV)}\quad \nu H(\mu,\nu,\varrho)=\psi(\mu,\varrho)+2c(\varrho-1)H(\mu,\nu+2,\varrho-1)$$
$$+2b(\varrho-1)E(\mu+1,\nu+1,\varrho-1)$$

Durch Subtraktion von III und IV erhalten wir ein ähnliches Resultat, wie die Gleichung (5) bei der Funktion $E(\mu,\nu)$, nämlich:

$$\text{(V)}\qquad (\mu-\nu)H(\mu,\nu,\varrho)=\psi(\nu,\varrho)-\psi(\mu,\varrho)$$
$$+2a(\varrho-1)H(\mu+2,\nu,\varrho-1)-2c(\varrho-1)H(\mu,\nu+2,\varrho-1)$$

§ 4.

Spezialfälle der Funktionen $E(\mu, \nu)$ und $H(\mu, \nu, \varrho)$.

Im folgenden mögen nun einige Spezialfälle der beiden vorliegenden Funktionen gegeben werden.

Wir gehen dabei wieder aus von der Integraldarstellung:

$$E(\mu,\nu)=\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\mu-1}y^{\nu-1}e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dx\,dy \qquad \begin{matrix}\mu<1\\ \nu<1\end{matrix}$$

und:

$$H(\mu,\nu,\varrho)=\int_0^1\int_0^1 x^{\mu-1}y^{\nu-1}[1-(ax^2+2bxy+cy^2)]^{\varrho-1}\,dx\,dy \qquad \begin{matrix}\mu<1\\ \nu<1\\ \varrho<1\end{matrix}$$

Nehmen wir hierin den speziellen Fall $b=0$, so erhalten wir zunächst für $E(\mu,\nu)$ die spezielle Relation:

$$E(\mu,\nu)=\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-ax^2}\,dx\times\int_0^\infty y^{\nu-1}e^{-cy^2}\,dy$$

und das ist, wie wir bereits im § 1 gesehen haben, einfach das Produkt zweier Gammafunktionen, nämlich:

$$E^*(\mu,\nu)=\frac{1}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{a^{\frac{\mu}{2}}\cdot c^{\frac{\nu}{2}}}$$

Weitere spezielle Fälle, etwa für $\mu=\nu=1$, oder $\mu=\nu=2$ usw., lassen sich hieraus leicht folgern:

$$E^*(1,1)=\frac{1}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{c}}=\frac{1}{4}\,\frac{\pi}{\sqrt{a}\sqrt{c}} \quad\text{und}\quad E^*(2,2)=\frac{1}{4}\,\frac{\Gamma(1)\Gamma(1)}{a\cdot c}=\frac{1}{4\cdot ac}$$

Für die zweite Funktion $H(\mu,\nu,\varrho)$ können wir ebenfalls für $b=0$ einen Spezialfall herleiten, der auch schon früher erwähnt wurde.

Wir erhalten nämlich für $b=0$

$$H^*(\mu,\nu,\varrho)=\int_0^1\int_0^1 x^{\mu-1}y^{\nu-1}[1-(ax^2+cy^2)]^{\varrho-1}\,dx\,dy \qquad \begin{matrix}\mu<1\\ \nu<1\\ \varrho<1\end{matrix}$$

wofür wir auch schreiben können:

$$H^*(\mu,\nu,\varrho)=\int_0^1\int_0^1 x^{\mu-1}y^{\nu-1}\left[1-\left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)^2-\left(\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{c}}}\right)^2\right]^{\varrho-1}dx\,dy$$

Dieses Integral läßt sich aber nach dem bereits im § 2 angeführten Theorem von Liouville (Journ. de Mathem. t. 4, p. 225ff.) auswerten.

Es ist nämlich:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \dots f\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p+\left(\frac{y}{\beta}\right)^q+\left(\frac{y}{\gamma}\right)^r+\dots\right] x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}\dots dx\,dy\,dz\dots$$

$$=\frac{\alpha^a\beta^b\gamma^c\dots}{p\cdot q\cdot r\dots}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\Gamma\left(\frac{c}{r}\right)\cdots}{\Gamma\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\dots\right)}\int_0^h f(\vartheta)\,\vartheta^{\frac{a}{p}-\frac{b}{q}-\frac{c}{r}+\dots-1}\,d\vartheta$$

unter der Bedingung, daß

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p+\left(\frac{y}{\beta}\right)^q+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^r+\dots<h$$

und $a, b, c\dots$ und $\alpha, \beta, \gamma\dots$ positive Parameter sind.

Nehmen wir also nun

$$\alpha=a^{-\frac{1}{2}};\ \beta=c^{-\frac{1}{2}};\ a=\mu;\ b=\nu$$

ferner $p=q=2$ und $h=1$ und für

$$f\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p+\left(\frac{y}{\beta}\right)^q+\dots\right]=\left[1-\left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)^2-\left(\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{c}}}\right)^2\right]^{\varrho-1},$$

so erhalten wir unter der Bedingung:

$$\left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)^2+\left(\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{c}}}\right)^2<1$$

für die spezielle Funktion $H^*(\mu, \nu, \varrho)$ den Ausdruck:

$$H^*(\mu,\nu,\varrho)=\frac{1}{a^{\frac{\mu}{2}}\cdot c^{\frac{\nu}{2}}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}\cdot\int_0^1(1-\vartheta)^{\varrho-1}\vartheta^{\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-1}\,d\vartheta.$$

Nun ist aber:

$$\int_0^1(1-\vartheta)^{\varrho-1}\vartheta^{\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-1}\,d\vartheta=B\left(\frac{\mu+\nu}{2},\varrho\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\cdot\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)}$$

und daher auch:

$$H^*(\mu,\nu,\varrho)=\frac{1}{a^{\frac{\mu}{2}}\cdot c^{\frac{\nu}{2}}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\cdot\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\varrho\right)}$$

Hieraus folgen für $\mu = \nu = \varrho = 1$ weitere besondere Fälle, nämlich:

$$H^*(1,1,1) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(1)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{\sqrt{a \cdot c}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi = \frac{\pi}{4\sqrt{a \cdot c}}$$

und für $\mu = \nu = \varrho = 2$

$$H^*(2,2,2) = \frac{1}{a \cdot c} \cdot \frac{1}{4} \frac{\Gamma(1) \cdot \Gamma(1)\Gamma(2)}{\Gamma(2+2)} = \frac{1}{a \cdot c} \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

Zu denselben Resultaten wären wir auch gelangt, wenn wir in den beiden „Normalformen“ der vorgelegten Doppelintegrale $\beta = 0$ angenommen hätten.

Auch aus diesen beiden Spezialfällen $H^*(\mu, \nu, \varrho)$ und $E^*(\mu, \nu)$ geht hervor, daß in der Tat die im § 2 abgeleitete Relation für den Zusammenhang dieser beiden Funktionen, nämlich:

$$H(\mu, \nu, \varrho) = \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2} + \varrho\right)} \cdot E(\mu, \nu)$$

auch für die besonderen Funktionen $H^*(\mu, \nu, \varrho)$ und $E^*(\mu, \nu)$ gilt.

Einen weiteren Spezialfall erhalten wir dann, wenn wir in der „Normalform“

$$E(\mu, \nu) = C \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-(x^2 + 2\beta xy + y^2)} dx\, dy$$

den Koeffizienten $\beta = 1$ annehmen.

Dieser Fall $\beta = 1$ wäre aber, wenn wir an die Bedeutung von $\beta = \frac{b}{\sqrt{ac}}$ denken gleichbedeutend mit der Bedingung, daß $\sqrt{ac} = b$ wäre. Damit wäre aber die Voraussetzung einer positiven definitiven Form $\varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ aufgehoben, denn wie wir bereits gesehen hatten, ist dafür stets festzusetzen, daß $\frac{b}{\sqrt{ac}} = \beta < 1$ bleibt.

Lassen wir jedoch diesen Ausnahmefall $\beta = 1$ zu, so erhalten wir für die Funktion $E(\mu, \nu)$ nunmehr folgende spezielle Funktionen:

$$\mathfrak{E}(\mu, \nu) = C \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-(x+y)^2} dx\, dy$$

und diese läßt sich durch die bekannte Jacobische Transformation

$$x = uv \text{ und } y = u(1-v)$$

von der Jacobi im Crelleschen Journal, Bd. 11, zur Herleitung der Formel

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Gebrauch macht, ebenfalls wieder als Produkt von Gammafunktionen darstellen.

Denn es sind dann offenbar die Integrationsgrenzen:

$$u = 0 \ldots\ldots\ldots \infty \text{ und } v = 1 \ldots\ldots 0$$

und die Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = -u$$

und außerdem $x+y = uv+u(1-v) = u$.

Die spezielle Funktion $E(\mu,\nu)$ geht demnach durch obige Jacobische Transformation in folgendes Produkt zweier einfacher Integrale über:

$$\mathfrak{E}(\mu,\nu) = C\int_0^\infty u^{\mu+\nu-1}e^{-u^2}du \times \int_0^1 v^{\mu-1}(1-v)^{\nu-1}dv$$

von denen bekanntlich:

$$\int_0^\infty u^{\mu+\nu-1}e^{-u^2}du = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)$$

und

$$\int_0^1 v^{\mu-1}(1-v)^{\nu-1}dv = B(\mu,\nu) = \frac{\Gamma(\mu)\cdot\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}$$

ist. Demnach erhalten wir für $\beta = 1$ als Resultat die Funktion:

$$\mathfrak{E}(\mu,\nu) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a^{\frac{\mu}{2}}c^{\frac{\nu}{2}}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\cdot\Gamma(\nu)\cdot\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}{\Gamma(\mu+\nu)}$$

Einen weiteren Spezialfall für die Funktion $E(\mu,\nu)$ erhalten wir noch, wenn wir von einem allgemeinen Theorem Gebrauch machen, das Schlömilch über ein vielfaches Integral in dem I. Bd. der Zeitschrift für Mathem. und Physik, pag. 356 ff., mitteilt.

Danach ist das vielfache Integral:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \dots e^{-(x+y+\dots+u+a\sqrt{x\cdot y\dots u})} x^{\frac{0}{n}} y^{\frac{1}{n}} \dots u^{\frac{n-1}{n}} dx\,dy\dots du$$

$$= \sqrt{n}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1\cdot 2\dots(n-1)}{(n+a)^n}$$

Setzen wir nun in dem vorgelegten Doppelintegral:

$$E(\mu,\nu) = \int_0^\infty\int_0^\infty x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-(x^2+2\beta xy+y^2)} dx\,dy$$

$$x = \sqrt{\xi};\ y = \sqrt{\eta};\ dx = \frac{1}{2}\xi^{-\frac{1}{2}} d\xi;\ dy = \frac{1}{2}\eta^{-\frac{1}{2}} d\eta,$$

so bleiben die Integrationsgrenzen dieselben und wir erhalten, wenn wir wieder die ursprünglichen Variabeln x und y einführen, für $E(\mu,\nu)$ nunmehr folgende Darstellung:

$$E(\mu,\nu) = \frac{1}{4}\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\frac{\mu}{2}-1} y^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-(x+y+2\beta\sqrt{xy})} dx\,dy.$$

Nehmen wir in der obigen allgemeinen Formel von Schlömilch $n=2$, so folgt:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y+a\sqrt{xy})} x^{\frac{0}{2}} y^{\frac{1}{2}} dx\,dy = \frac{2\sqrt{\pi}}{(2+a)^2}.$$

Dabei muß a positiv und größer als 2 sein, damit der Wert des Integrals endlich bleibt.

Setzen wir nun in der soeben für $E(\mu,\nu)$ erhaltenen Darstellung $\mu=2$ und $\nu=3$, so ist:

$$E(2,3) = \frac{1}{4}\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\frac{0}{2}} y^{\frac{3}{2}-1} e^{-(x+y+2\beta\sqrt{xy})} dx\,dy$$

und dies ist nach dem Schlömilchschen Integral:

$$E(2,3) = \frac{2\sqrt{\pi}}{4(2+2\beta)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{8(1+\beta)^2}$$

Dies letzte Resultat gilt also nur, wenn wir die Voraussetzung für $\varphi(x,y)$ als positive definite Form aufgeben.

Ebenso lassen sich für die zweite Funktion $H(\mu,\nu,\varrho)$ auf einfache Weise einige Spezialfälle angeben.

Nehmen wir z. B. $\varrho = 1$, so wird $H(\mu, \nu, 1)$ gleich dem bekannten Dirichletscheu Integral

$$H(\mu, \nu, 1) = \int_0^1 \int_0^1 x^{\mu - 1} y^{\nu - 1} dx\, dy,$$

von dem Dirichlet (Werke, Bd. I, p. 398) nachweist, daß dies gleich ist:

$$H(\mu, \nu, 1) = \frac{\Gamma(\mu) \cdot \Gamma(\nu)}{\Gamma(1+\mu+\nu)} = \frac{\Gamma(\mu) \cdot \Gamma(\nu)}{(\mu+\nu)\,\Gamma(\mu+\nu)} = \frac{B(\mu, \nu)}{\mu+\nu},$$

falls man die Integration über ein Dreieck mit den Ecken: (0, 0); (0, 1) und (1, 0) der xy-Ebene erstreckt.

Ferner erhält man offenbar für $\mu = \nu = \varrho = 1$

$$H(1, 1, 1) = \int_0^1 \int_0^1 dx\, dy = 1$$

für $\mu = \nu = \varrho = 2$

$$H(2, 2, 2) = \int_0^1 \int_0^1 x \cdot y [1 - \varphi(x, y)]\, dx\, dy = \frac{1}{4} - \frac{a}{8} - \frac{2b}{9} - \frac{c}{8}$$

und durch einfache Rechnung ebenso für $\mu = \nu = \varrho = 3$

$$H(3, 3, 3) = \int_0^1 \int_0^1 x^2 y^2 [1 - \varphi(x, y)]^2 dx\, dy = \frac{1}{9} - \frac{2a}{15} - \frac{b}{4} - \frac{2c}{15} + \frac{a^2}{21} + \frac{ab}{6} - \frac{2(ac + 2b^2)}{25} + \frac{bc}{6} + \frac{c^2}{21}.$$

Von diesen speziellen Funktionen aus könnte man weiterhin vermittels der im § 2 für den Zusammenhang von $E(\mu, \nu)$ und $H(\mu, \nu, \varrho)$ ermittelten Formel Schlüsse auf ähnliche Spezialfälle der Funktion $E(\mu, \nu)$ ziehen.

§ 5.

Versuche, vermittels der Funktion $E(\mu, \nu)$ gewisse vielfache Integrale zu reduzieren.

Eine von den vielen bekannten Eigenschaften der Gammafunktion ist unter anderen auch die Möglichkeit, vielfache Integrale vermittels dieser Funktion auf einfache Integrale zurückzuführen, was in vielen Fällen gleichbedeutend mit der Auswertung dieser vielfachen Integrale ist. Von diesen zahl-

reichen Methoden seien unter anderen nur etwa diejenigen von Winckler, Cauchy, Schlömilch, Dirichlet, Liouville, u. a. m. erwähnt.

Im folgenden möge nun versucht werden, in aller Kürze und gewissermaßen nur andeutungsweise auf einige Methoden aufmerksam zu machen, die auf ähnlichem Wege ermöglichen, gewisse vielfache Integrale mit Hilfe der vorgelegten Funktion $E(\mu, \nu)$ zu reduzieren.

Dazu möge jedoch vorher eine Formel für diese Funktion abgeleitet werden, die sich für die Reduktion solcher vielfacher Integrale nützlich erweisen wird.

Gehen wir aus von der Integraldarstellung:

$$E(\mu, \nu) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dx dy$$

und setzen darin $x = \varkappa x$ und $y = \varkappa y$, wo $\varkappa < 0$ sein muß, so folgt:

$$E(\mu, \nu) = \varkappa^{\mu+\nu} \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-\varkappa^2 [\varphi(x,y)]} dx dy$$

oder:

$$(1) \qquad \frac{1}{\varkappa^{\mu+\nu}} = \frac{1}{E(\mu, \nu)} \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\mu-1} y^{\nu-1} e^{-\varkappa^2 \varphi(x,y)} dx dy \qquad \begin{matrix} \mu > 1 \\ \nu > 1 \\ \varkappa > 0 \end{matrix}$$

Es muß dabei die Größe $\varkappa$ positiv vorausgesetzt werden, wenn das resultierende Doppelintegral einen völlig bestimmten Sinn haben soll.

Setzen wir nun etwa:

$$x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \ldots\ldots x_m^{\alpha_m-1} = X$$

$$y_1^{\beta_1-1} y_2^{\beta_2-1} \ldots\ldots y_n^{\beta_n-1} = Y$$

und:

$$u = \sum_{\gamma=1}^{\gamma=m} a_\gamma^2 x_\gamma^2 \sum_{\substack{\alpha=1,3\ldots\ldots n-1 \\ \beta=2,4\ldots\ldots n}} \varphi(y_\alpha, y_\beta),$$

so wird, falls wir $n > m$ annehmen, das $(m+n)$-fache Integral:

$$\int_0^{\infty\,(n+m)} \ldots\ldots X \cdot Y e^{-u}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$$

vermittels obiger Relation (1) auf ein m-faches Integral sich reduzieren:

Es ist nämlich:

$$\int_0^{\infty\,(n+m)} \ldots\ldots X \cdot Y e^{-u}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$$

$$= \int_0^{\infty\,(m)} \ldots \frac{X\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m\, E(\beta_1 \beta_2) \ldots E(\beta_{n-1}, \beta_n)}{\left\{\sum_1^m{}_\gamma (a_\gamma^2 x_\gamma^2)\right\}^{\beta_1+\beta_2} \ldots\ldots \left\{\sum_1^m{}_\gamma (a_\gamma^2 x_\gamma^2)\right\}^{\beta_{n-1}+\beta_n}},$$

oder auch:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\infty\,(n+m)} \ldots\ldots X \cdot Y e^{-u}\, dx_1 \ldots dx_m\, dy_1 \ldots dy_n \\ &= E(\beta_1 \beta_2) \ldots E(\beta_{n-1} \beta_n) \int_0^{\infty} \ldots \frac{X\, dx_1 \ldots dx_m}{\prod_{\substack{\mu=1,3\ldots n-1 \\ \nu=2,4\ldots n}} \left\{\sum_1^m{}_\gamma (a_\gamma^2 x_\gamma^2)\right\}^{\beta_\mu+\beta_n}} \end{aligned}\right.$$

Nehmen wir etwa speziell: $m=1$, $n=1,2$ und $a_\gamma = 1$, so wird das dreifache Integral:

$$\int_0^{\infty} x_1^{\alpha_1-1} y_1^{\beta_1-1} y_2^{\beta_2-1} e^{-x^2(a y_1^2 + 2b y_1 y_2 + y_2^2)}\, dx_1\, dy_1\, dy_2$$

$$= E(\beta_1 \beta_2) \int_0^{\infty} \frac{x_1^{\alpha_1-1}}{x_1^{\beta_1+\beta_2}}\, dx_1$$

Ein weiterer Fall wäre etwa der, daß wir das $(n+m+p)$-fache Integral betrachten:

$$\int_0^{\infty\,(n+m+p)} \ldots\ldots X Y Z e^{-u}\, dx_1 \ldots dx_m\, dy_1 \ldots dy_n\, dz_1 \ldots dz_p$$

worin:

$$X = x_1^{\alpha_1 - 1} \cdot x_2^{\alpha_2 - 1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m - 1}$$

$$Y = y_1^{\beta_1 - 1} \cdot y_2^{\beta_2 - 1} \cdot \ldots \cdot y_n^{\beta_n - 1}$$

$$Z = z_1^{\gamma_1 - 1} \cdot z_2^{\gamma_2 - 1} \cdot \ldots \cdot z_p^{\gamma_p - 1}$$

und

$$u = \Sigma\Sigma(a_\gamma x_\gamma + a_\delta z_\delta)^2 \Sigma\Sigma q_{\alpha\beta}(x_\alpha y_\beta)$$

ist. Vermittels der Relation (1) würden wir dann wieder erhalten:

Es ist:

$$(3)\begin{cases} \overbrace{\int\int\int\ldots}^{\infty\,(n+m+p)} \ldots\ldots XYZe^{-u} dx_1 \ldots dx_m\, dy_1 \ldots dy_n\, dz_1 \ldots dz_p \\ = E(\beta_1\beta_2) E(\beta_3\beta_4) \ldots E(\beta_{n-1}\beta_n) \overbrace{\int\int\int\int\int}^{\infty\,(m+p)} \frac{Z \cdot X dx_1 \ldots dx_m\, dz_1 \ldots dz_p}{\Pi_{\mu,\nu}[\Sigma(a_\mu x_\mu + c_\nu z_\nu)^2]^{\beta\mu+\beta\nu}} \end{cases}$$

Dabei muß aber $\mu = 2(m+p)$ d. h. eine gerade Zahl sein.

Nehmen wir wieder einen speziellen Fall an, etwa $m = 1$, $p = 1$, so ist $n = 4$ und demnach folgt für 6fache Integral:

$$\overbrace{\int\int\int\int\int\int}^{\infty\,(6)} \ldots x_1^{\alpha_1 - 1} z_1^{\gamma_1 - 1} y_1^{\beta_1 - 1} \ldots\ldots y_4^{\beta_4 - 1} dx_1\, dz_1\, dy_1 \ldots\ldots dy_4$$

$$= E(\beta_1\beta_2) \cdot E(\beta_3\beta_4) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x_1^{\alpha_1 - 1} z_1^{\gamma_1 - 1} dx_1\, dz_1}{(a_1 x_1 + c_1 z_1)^{2(\beta_1+\beta_2)} \cdot (a_1 x_1 + c_1 z_1)^{2(\beta_3+\beta_4)}}$$

Wir sehen also, daß in der Tat, ähnlich wie bei der Gammafunktion, eine Redukion gewisser vielfacher Integrale auf einfachere möglich ist, wenn auch vielleicht nicht in der vorteilhaften Weise, wie dies für das bekannte Eulersche Integral der Fall ist.

Überblicken wir zum Schluß noch einmal die erhaltenen Resultate im kurzen Zusammenhang mit analogen Ergebnissen aus der Theorie der Eulerschen Integrale, so sehen wir, daß die hier vorgelegten Doppelintegrale $E(\mu, \nu)$ und $H(\mu, \nu, \varrho)$ allerdings für praktische Untersuchungen nicht die zahlreichen

schönen Ergebnisse liefern, wie wir sie gerade bei den Funktionen $\Gamma(p)$ und $B(p, q)$ vorfinden. Vielleicht ist es späteren Untersuchungen vorbehalten, auch in dieser Hinsicht noch nützliche Resultate zu fördern.

Immerhin kann man wohl sagen, daß diese beiden Funktionen $E(\mu, \nu)$ und $H(\mu, \nu, \varrho)$, eben wegen ihrer Analogie mit den Eulerschen Funktionen, schon um ihrer selbst willen, hohes Interesse beanspruchen.

Literatur.

1. Gauß, Gesammelte Werke, Bd. III. Disquisitiones circa seriem infinitam.
2. Niels Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktionen. Leipzig 1906.
3. Gust. Ferd. Meyer, Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen (mit vorzüglicher Berücksichtigung der von Lejeune-Dirichlet im Sommer 1858 gehaltenen Vorträge über best. Integrale). Leipzig 1871.
4. O. Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung in 3 Bdn. Insbes. Bd. III: Die Lehre von den Doppelintegralen. Leipzig 1899.
5. J. A. Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, S. 192ff. 3. Aufl., bearb. v. G. Scheffers. Leipzig 1907.
6. Oskar Schlömilch, Analytische Studien. I. Abtlg.: Theorie und Tafel der Gammafunktionen und deren wichtigste Anwendungen. Leipzig 1848.
7. Barnes, Theory of the gammafunction. (Messeng. of Mathem., vol. 29, pag. 64ff).
8. Godefroy, La fonction gamma. Paris 1901.
9. Limbourg, Théorie de la fonction gamma. Gent 1859.
10. Enneper, Über die Funktion II von Gauß mit komplexen Argument. Diss. Göttingen 1856.
11. Hankel, Die Eulerschen Integrale mit unbeschränkter Variabilität des Argumentes. Diss. Leipzig 1863.
12. Liouville, Sur une intégrale définie multiple. Journ. de math. II. Série, t. 4, pag. 155—160 und 225—235.
13. Lejeune-Dirichlet, Sur une nouvelle méthode pour la détermination des intégrales multiples. Ges. Werke, Bd. I, pag. 375ff.
14. Pringsheim, Zur Theorie der Gammafunktion. Mathem. Annalen, Bd. 31, S. 165—171. 1876.
15. Stern, Zur Theorie der Eulerschen Integrale. Göttg.-Studien 1847.
16. Schlömilch, Zeitschr. f. Mathematik u. Physik, Bd. I, S. 356.
17. Klein, Über die hypergeometrische Funktion. S. 125ff. 1894.

18. Kummer, Über die hypergeometrische Reihe. Crelle-Journ., Bd. XV, S. 39—83. 1836.
19. Appel, Die hypergeometrischen Reihen mit 2 Variabeln. Compt. rendues. 1880.
20. Heine, Über die verallgemeinerte hypergeometrische Reihe. Crelle-Journ., Bd. 34, S. 290ff.
21. Bachmann, Niedere Zahlentheorie. 1902.
22. Bernh. Riemann, Gesammelte Werke. Zur Theorie der hypergeometrischen Reihe $F(a, b, c, x)$, S. 67—87. Leipzig 1892.
23. Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen d. mathematischen Physik. II. Bd., S. 40—55.

Lebenslauf.

Ich, Hans Eckert (evangelischer Konfession), wurde geboren am 5. Juli 1889 zu Herrenalb in Wttbg. (Schwarzwaldkreis) als Sohn des Hauptmanns a. D. Karl Eckert und seiner Ehefrau Julie geb. Bitterling.

Den ersten Schulunterricht erhielt ich bei einem Hauslehrer. Nach dem im Jahre 1897 erfolgten Tode meines Vaters verzogen wir nach Thüringen, und ich besuchte dann die Realschule zu Gotha von Michaelis 1897 bis Sommer 1904. Zu dieser Zeit erkrankte ich an einem Ohrenleiden, das mich zwang bis Ostern 1905 mit dem Schulunterricht auszusetzen. Von Ostern 1905 bis Ostern 1909 besuchte ich die vier obersten Klassen des Gymnasiums Ernestinum coctus realis zu Gotha. Nach bestandener Reifeprüfung bezog ich Ostern 1909 die Universität Leipzig, um mich der Mathematik, Philosophie und Nationalökonomie zu widmen. Während des Winter-Semesters 1910/11 besuchte ich die Universität Berlin; Ostern 1911 kehrte ich nach Leipzig zurück und verblieb dort den Rest meiner Studienzeit bis März 1913. Am 1. April desselben Jahres trat ich dann als Beamter in die Gothaer Lebensversicherungsbank auf Gegenseitigkeit ein.

Vorlesungen hörte ich während meiner Studienzeit in Berlin bei den Herren: v. Bortkiewicz, Breysig, Hettner, Kretzschmar, Lasson, Oppenheimer, Runze, Simmel, A. H. Schwarz, Adolf Wagner und dem Austauschprofessor Dr. Münsterberg, Prof. an der Haward-University Cambridge, und in Leipzig bei den Herren: P. Barth, Biermann,

Bücher, Hausdorff, Heinze, Herglotz, Hölder, Liebmann, Prüfer, Rohn, Stieda, Volkelt und Wundt.

Allen meinen verehrten Lehrern danke ich für die zahlreichen Anregungen, die sie mir während meiner Studienzeit gegeben haben. Zu ganz besonderem Danke aber fühle ich mich Herrn Geheimrat Prof. Dr. Hölder, sowie Herrn Prof. Dr. Herglotz verpflichtet für die Ratschläge und Förderung, die sie mir beider Abfassung der vorliegenden Abhandlung erteilt haben.